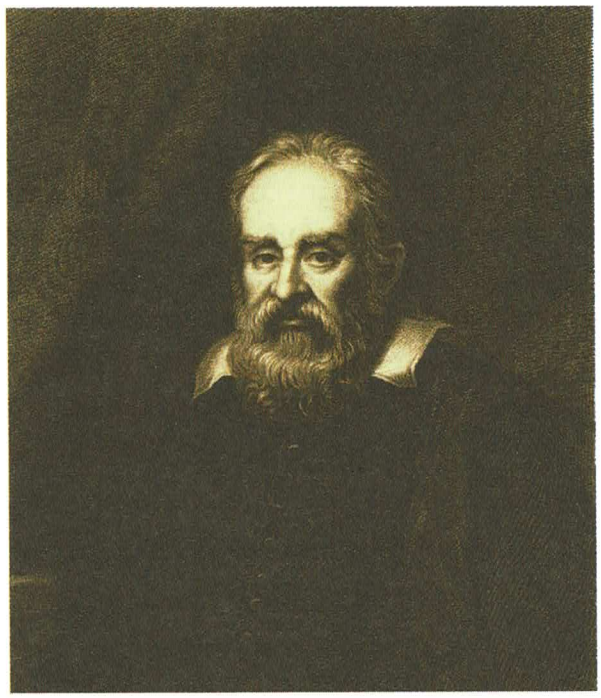
פרק 3 – נפילה חופשית בכיוון אנכי



גלילאו גליליי (1564-1642), היה בין הראשונים שחקר את נפילת הגופים על פני כדור הארץ.

בפרק זה נדון בתנועת גופים המשוחררים ממנוחה בסביבה הקרובה לפני כדור הארץ, או הנזרקים על פני כדור הארץ בסביבה זו בכיוון אנכי כלפי מעלה או כלפי מטה.

גופים המשוחררים ממנוחה על פני כדור הארץ, או הנזרקים בכיוון אנכי כלפי מעלה או מטה והנעים תחת השפעת כוח הכובד בלבד, נעים, כפי שנלמד בפרק זה, בקו ישר ובתאוצה שניתן להניח בקירוב טוב שהיא קבועה, שכיוונה כלפי מטה. לכן נושא פרק זה, נחשב לדוגמה מחיי יום יום לתנועה בקו ישר ובתאוצה קבועה.

1. תאוצת הכובד

גופים המשוחררים ממנוחה בקרבת כוכב לכת או ירח של כוכב לכת, ובהזנחת כוח החיכוך עם האוויר במקרים בהם יש לכוכב הלכת אטמוספירה, נעים בתאוצה שכיוונה בכיוון מרכז כוכב הלכת או הירח, וגודלה שונה מכוכב לכת אחד לאחר (או מירח לירח), אבל הוא נחשב בקירוב טוב כקבוע בקרבת פני אותו כוכב לכת או ירח. בקרבת פני כדור הארץ, גודלה של תאוצה זו הוא $9.8\,\mathrm{m/s^2}$, בקרבת פני הירח גודלה של תאוצה זו הוא $1.67\,\mathrm{m/s^2}$, על פני מאדים תאוצה זו שווה ל- $3.71\,\mathrm{m/s^2}$ ועל פני השמש כ- $275\,\mathrm{m/s^2}$.

מכיוון שתאוצה זו נובעת מכוח הכובד הפועל על הגוף הנופל, היא נקראת **תאוצת הכובד**, ומסומנת באות g (מהמונח הלועזי gravity acceleration). לכן ניתן להגדיר:

תאוצת הכובד היא תאוצת הגופים הנופלים על פני כוכב הלכת בהשפעת כוח הכובד.

כאמור, גודלה של תאוצת הכובד בקרבת פני כדור הארץ הוא $9.8\,\mathrm{m/s^2}$, בערך. לשם נוחות נשתמש

בחישובים בקירוב שתאוצה זו היא $10\,\mathrm{m/s^2}$ $\left(g=10\,\mathrm{m/s^2}\right)$.

העובדה שהגופים הנופלים על פני כדור הארץ תחת השפעת כוח הכובד בלבד (כלומר בהזנחת כוח החיכוך עם האוויר), נופלים בתאוצה קבועה בגודלה ללא תלות במסת הגוף הנופל, אינה מובנת מאליה. לאורך תקופה ארוכה היה ויכוח בין המדענים לגבי תנועת הגופים הנופלים על פני כדור הארץ. לפי השקפת הפילוסוף היווני אריסטו (Aristotle) שחיי בין השנים 384-322 לפני הספירה, הגופים הכבדים (בעלי מסה גדולה יותר) נופלים מהר יותר מגופים קלים, ולכן הם מגיעים לקרקע לפני הגופים הקלים כאשר משחררים אותם מאותו גובה מעל פני הקרקע. דעה זו החזיקה מעמד עד המאה ה-16. גלילאו גליליי (Galileo Galilei 1564-1642) היה בין הראשונים שבדק את טענת אריסטו והפריך אותה. גליליו שם לב שכאשר יורד ברד, גם כדורי הברד הגדולים וגם הקטנים מגיעים ביחד לפני הקרקע. אם טענת אריסטו נכונה, כדורי הברד הגדולים צריכים היו להגיע קודם, ולאחר זמן מה היו אמורים לפגוע בקרקע כדורי הברד הקטנים. מכאן הגיע גליליי למסקנה שהזמן שלוקח לגוף להגיע לקרקע אינו תלוי במסה שלו, כפי שטען אריסטו. גליליי הצדיק את הטענה שלו והפריך את טענת אריסטו תוך התבססות על הטיעון הבא: **"אם משחררים שני גופים זהים (וכמובן בעלי אותה מסה) מאותו גובה מעל פני הקרקע, הם מגיעים לפני הקרקע באותו זמן ובאותה המהירות. כעת, אם קושרים את שני הגופים ביחד ומשחררים אותם מאותו גובה כקודם, למה שמהירותם תגדל, כפי שטוען אריסטו?"**

מה שניסה גליליו להבהיר הוא שיש סתירה בטענת אריסטו. נבהיר עניין זה על ידי הדוגמה הבאה: אם נשחרר שני גופים, a שמסתו $3\,\mathrm{kg}$ ו-b שמסתו $1\,\mathrm{kg}$, מאותו גובה מעל פני הקרקע, אז על פי טענת אריסטו הזמן t_a שלוקח לגוף a להגיע לקרקע קטן מהזמן t_b שלוקח לגוף b להגיע לקרקע $\left(t_a<t_b\right)$. אם נקשור כעת את שני הגופים ביחד ונשחרר את הגוף שנוצר (שנקרא לו c) מאותו גובה, אז לפי טענת אריסטו צריך להתקיים ש- $t_c<t_a<t_b$, כאשר t_c הוא הזמן שלוקח לגוף c להגיע לקרקע. זאת בגלל שמסת הגוף c גדולה ממסת הגוף a וממסת הגוף b.

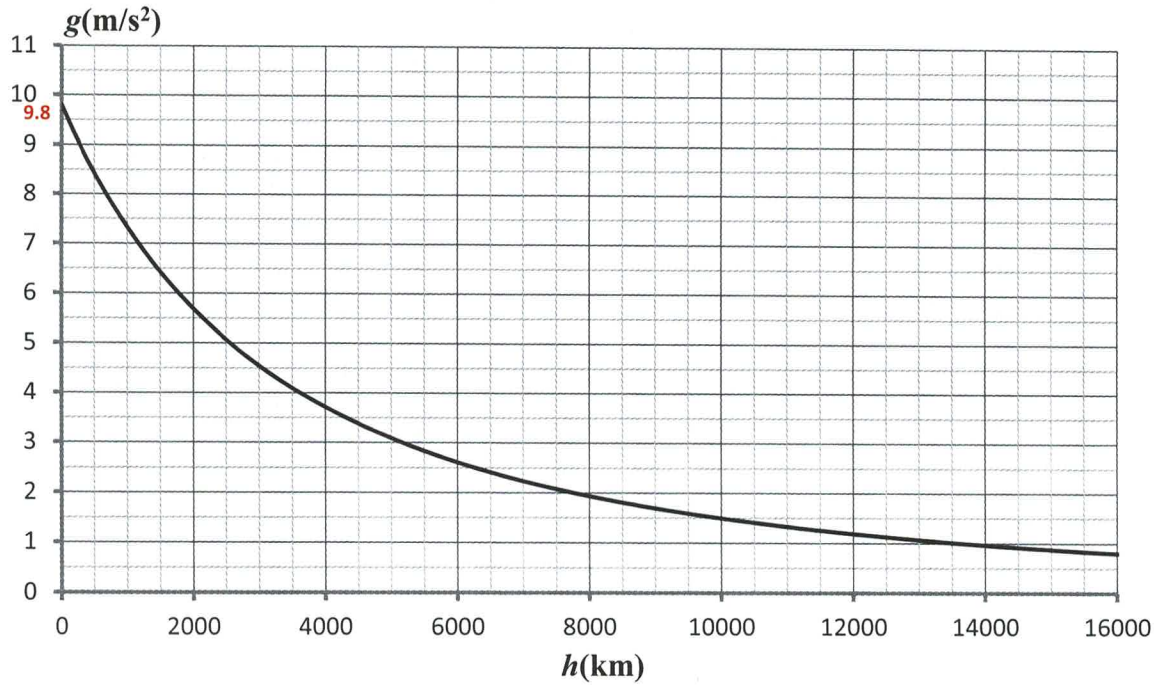
מצד שני, במהלך נפילת הגוף c שמורכב משני הגופים a ו-b, הגוף a הכבד יותר נוטה להאיץ את הגוף b והגוף b הקל יותר נוטה להאט את הגוף a. על כן צריך היה להתקיים ש-$t_a<t_c<t_b$. לכן קיימת סתירה. בו בזמן צריך להתקיים $t_c<t_a<t_b$ ו-$t_a<t_c<t_b$. הפתרון היחיד לסתירה זו הוא שצריך להתקיים $t_a=t_b=t_c$, ולכן המסקנה היא שכל הגופים הנופלים מאותו גובה מגיעים לקרקע באותו זמן ללא תלות במסה שלהם.

תכונות תאוצת הכובד בסביבת כדור הארץ:

1. כיוון תאוצת הכובד הוא כלפי מרכז כדור הארץ.
2. תאוצת הכובד אינה תלויה במסת הגוף הנופל. תאוצה זו תלויה רק במסת כדור הארץ, ובמרחק ממרכז כדור הארץ. בקרבת פני כדור הארץ, המרחק ממרכז כדור הארץ נחשב לקבוע, לכן בקרבת פני כדור הארץ גודלה של תאוצת הכובד נחשב לקבוע.
3. ככל שמתרחקים מפני הקרקע תאוצת הכובד תקטן בהדרגה, ובמרחקים גדולים מאוד (אינסופיים), תאוצת הכובד מתאפסת. באיור 1 מתואר גרף המתאר את תאוצת הכובד, g, כפונקציה של הגובה, h, מפני כדור הארץ.
4. על פני כדור הארץ תאוצת הכובד משתנה ממקום למקום במידה קטנה מאוד. תאוצת הכובד בקו המשווה שווה ל-$9.76\,\mathrm{m/s^2}$, ואילו בקטבים היא שווה ל-$9.83\,\mathrm{m/s^2}$. הבדלים אלה נובעים משתי סיבות בעיקר. הסיבה הראשונה היא שכדור הארץ אינו כדורי במדויק. הוא פחוס מהקטבים. מרחק הקטבים ממרכז כדור הארץ קטן ממרחק נקודה כלשהי על קו המשווה ממרכז כדור הארץ. כתוצאה מכך תאוצת הכובד בקטבים גדולה יותר מאשר בקו המשווה. מרחק הקטבים ממרכז כדור הארץ הוא $6{,}357\,\mathrm{km}$, ומרחק הנקודות על קו המשווה ממרכז כדור

הארץ הוא $6{,}378\,\text{km}$.

הסיבה השנייה היא סיבוב כדור הארץ סביב צירו (ציר שעובר דרך הקטבים). סיבוב זה (כפי שנלמד בפרק 5 בכרך ב' של הספר) מקטין אף הוא את תאוצת הכובד בקו המשווה לעומת תאוצת הכובד בקטבים.



איור 1: תאוצת הכובד על פני כדור הארץ כפונקציה של הגובה מפני כדור הארץ.

ראוי לציין שתכונות תאוצות הכובד על פני כדור הארץ, שהזכרנו למעלה, מתקיימות גם לגבי כוכבי לכת אחרים או ירחיהם.

2. נפילה חופשית

הגדרה: נפילה חופשית היא תנועת גוף בהשפעת כוח הכובד בלבד.

הגופים הנופלים חופשית על פני כוכב לכת (כלומר הנעים בהשפעת כוח הכובד של כוכב הלכת, בלבד), נעים בתאוצה שהיא תאוצת הכובד, ומכיוון שתנועת גופים אלה נקראת נפילה חופשית, תאוצתם נקראת גם תאוצת **הנפילה החופשית**. ברור שתאוצת הנפילה החופשית שווה בגודלה ובכיוונה לתאוצת הכובד.

בקרבת פני כדור הארץ, גודלה של תאוצת הנפילה החופשית הוא $10\,\text{m/s}^2$ וכיוונה לכיוון מרכז כדור הארץ.

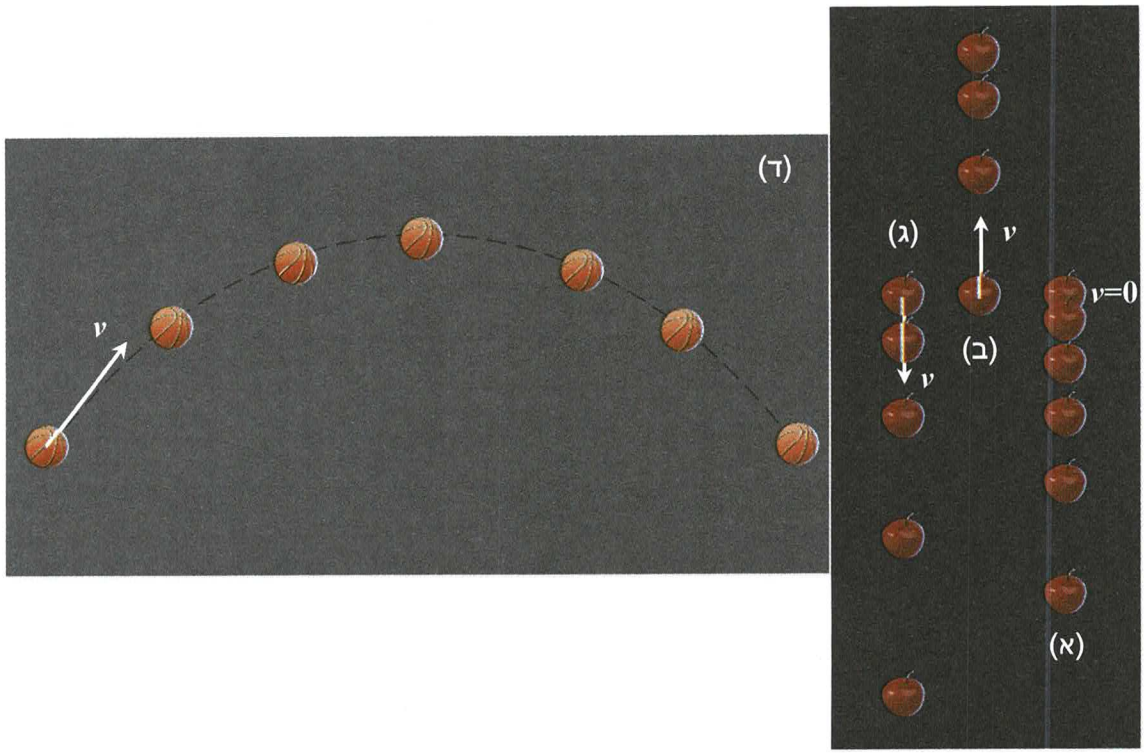
במקרים בהם כוח החיכוך עם האוויר אינו זניח, תנועת הגוף הנזרק על פני כדור הארץ לא נחשבת לנפילה חופשית. בפרק זה נזניח בכל המקרים את כוח החיכוך עם האוויר, אלא אם נציין אחרת. לכן בכל המקרים שנדון בהם בפרק זה, תנועת גופים הנזרקים על פני כדור הארץ נחשבת לנפילה חופשית.

על פי הגדרת הנפילה החופשית, כאשר גוף:

1. משוחרר מגובה מסוים מעל פני הקרקע (כפי שמתואר באיור 2א), או
2. נזרק אנכית כלפי מעלה (כפי שמתואר באיור 2ב) או כלפי מטה (כפי שמתואר באיור 2ג)
3. נזרק בזווית כלשהי (כפי שמתואר באיור 2ד)

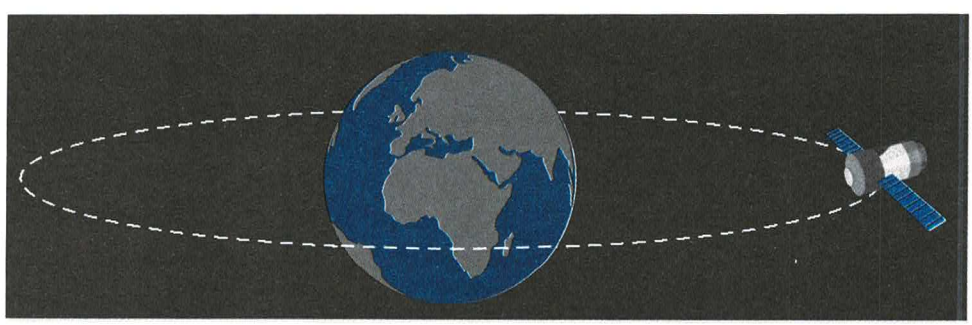
נוצרת תנועה הנקראת נפילה חופשית (חופשית מהשפעת כוחות נוספים מלבד כוח הכובד) וזאת משום שבכל התנועות האלה הכוח היחיד הפועל על הגוף (בהזנחת כוח החיכוך עם האוויר) הוא

כוח הכובד. אם כוח החיכוך עם האוויר אינו זניח, תנועות אלה לא נחשבות לנפילה חופשית.



איור 2: (א) גוף נופל ממנוחה. (ב) גוף נזרק אנכית כלפי מעלה. (ג) גוף נזרק אנכית כלפי מטה. (ד) גוף נזרק בזווית.

גם תנועת הירח סביב כדור הארץ או תנועת לוויין סביב כדור הארץ (איור 3) היא נפילה חופשית, כי בתנועות אלה הגופים נעים בהשפעת כוח הכובד בלבד.

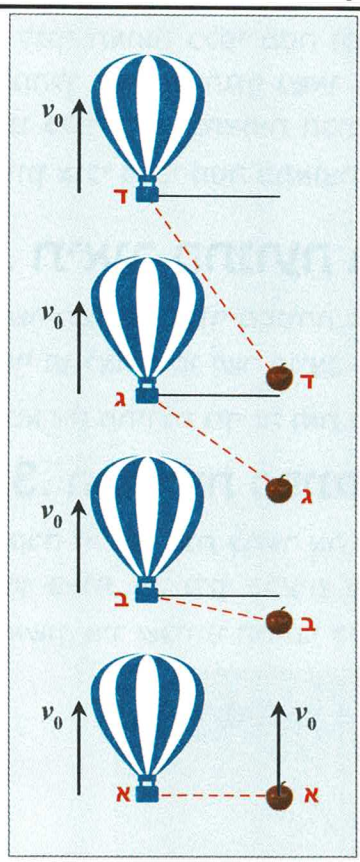


איור 3: תנועת לוויין סביב כדור הארץ היא נפילה חופשית.

נשאלת כאן השאלה: מהי המשמעות לכך שתנועת גוף הנזרק אנכית כלפי מעלה או כלפי מטה, נזרק בזווית או נע במסלול של לוויין, היא נפילה?

נענה על שאלה זו לגבי זריקה אנכית וזריקה בזווית. את משמעות הנפילה בתנועת לוויין סביב כדור הארץ, נסביר בפרק 5 בכרך ב' של הספר.

על מנת להבין את משמעות הנפילה החופשית של גוף הנזרק אנכית כלפי מעלה, יש להשוות את תנועת גוף זה לתנועה הנוצרת בהעדר כוח הכובד. אם נזרוק גוף כלפי מעלה במהירות v_0 ובהנחה שאין כוח כובד, הוא ימשיך לנוע בקו ישר ובמהירות קבועה כלפי מעלה, וזאת על פי עיקרון ההתמדה אותו נלמד בפרק 5 בספר זה. לעומת זאת, אם פועל על הגוף כוח כובד, הוא ינוע בתאוטה. תנועת הגוף הנע בהשפעת כוח הכובד יחסית למצב ההתמדה היא נפילה כלפי מטה בתאוצה שגודלה g.



איור 4: יחסית לכדור הפורח שעולה כלפי מעלה התפוח המשוחרר ממנו נופל כלפי מטה ממנוחה בתאוצת הכובד.

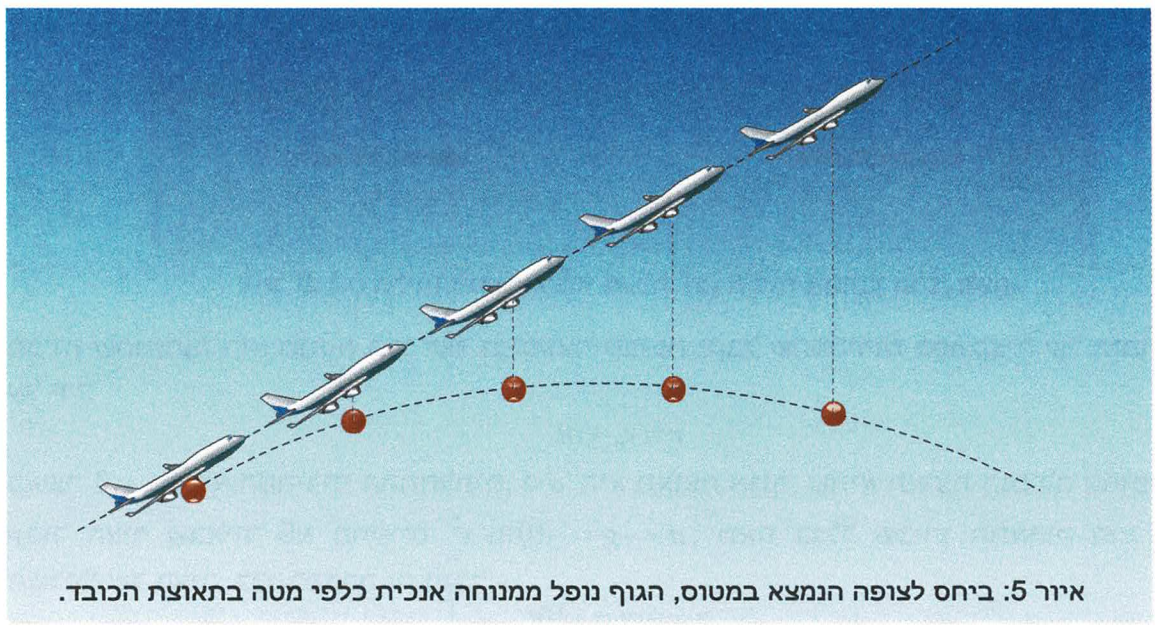
על מנת להבהיר זאת, נעיין באיור 4 שבו מתואר כדור פורח העולה כלפי מעלה במהירות קבועה v_0. באיור 4א מתואר תפוח המשוחרר ממנוחה יחסית לכדור הפורח. יחסית לפני הקרקע, ברגע השחרור, התפוח מקבל מהירות התחלתית v_0 כלפי מעלה, שהיא מהירות הכדור הפורח. לעומת זאת, יחסית לכדור הפורח העולה כלפי מעלה במהירות קבועה v_0 (שהוא מייצג מצב ההתמדה), המהירות ההתחלתית של התפוח היא אפס, ולאחר מכן התפוח **נע כלפי מטה בתאוצה (נופל)** (ראה איורים 4ב, 4ג, ו-4ד). על מנת להראות זאת בדרך מתמטית, נבחר את הכיוון החיובי כלפי מעלה, ונקבל שמהירות התפוח ביחס לקרקע מרגע שחרורו נתונה על ידי:

$$v = v_0 + at = v_0 - gt \qquad (1)$$

וזאת כאשר הצבנו שתאוצת התפוח $a = -g$, שהיא תאוצת הכובד (הסימן השלילי בתאוצה כי בחרנו את הכיוון החיובי כלפי מעלה). מכיוון שהכדור הפורח עולה במהירות קבועה v_0, נקבל שמהירות התפוח ביחס לכדור הפורח, אותה נסמן ב-v', שווה ל:

$$v' = (v_0 - gt) - v_0 = -gt \qquad (2)$$

כלומר ביחס לכדור הפורח התפוח נופל ממנוחה בתאוצת הכובד g, ולכן תנועת התפוח ביחס למצב ההתמדה נחשבת לנפילה חופשית.



איור 5: ביחס לצופה הנמצא במטוס, הגוף נופל ממנוחה אנכית כלפי מטה בתאוצת הכובד.

מצב דומה מתקבל עבור זריקה בזווית. על מנת להבהיר זאת, נניח שמטוס טס במהירות קבועה ובקו ישר היוצר זווית מסוימת עם פני הקרקע כמתואר באיור 5, וברגע מסוים מתנתק מהמטוס גוף שהיה מחובר לכנף. הגוף מתחיל את תנועתו ממנוחה יחסית למטוס. ביחס לקרקע הגוף מקבל מהירות התחלתית השווה למהירות המטוס בגודל ובכיוון. לולא כוח הכובד, הגוף, בגלל עיקרון ההתמדה, היה ממשיך לנוע בקו ישר בכיוון תנועת המטוס ובצמוד אליו. אולם בגלל כוח הכובד,

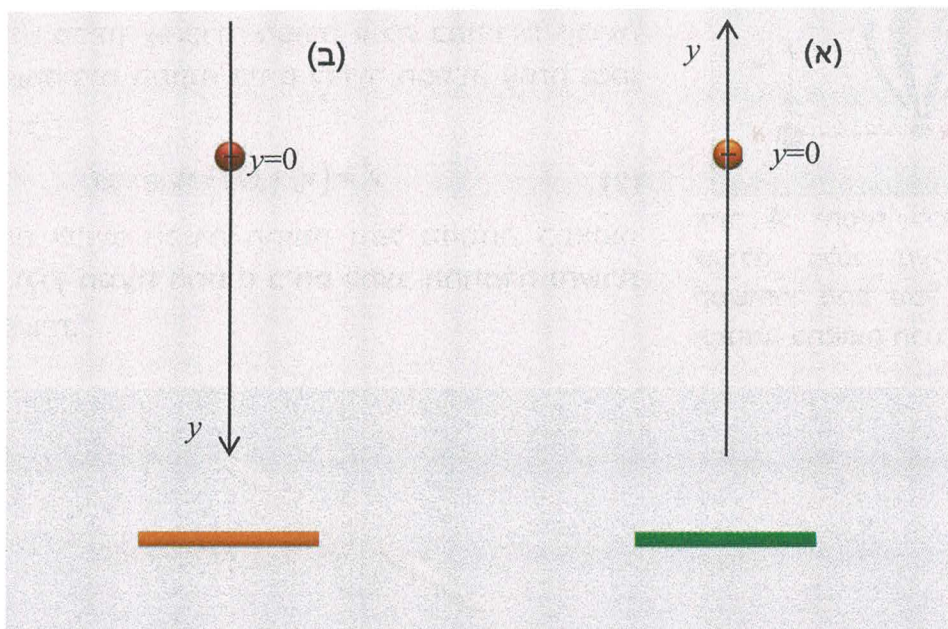
יש לגוף תאוצה כלפי מטה וכתוצאה מכך הוא נע במסלול עקום (ראה איור 5). בפרק 8 נלמד, שבמהלך תנועתו, הגוף נשאר בכיוון האופקי כל הזמן בדיוק מתחת למטוס ובכיוון אנכי מתרחק ממנו כלפי מטה בתאוצת הכובד g. לכן, ביחס לצופה הנמצא בתוך המטוס, הגוף נופל ממנוחה בכיוון אנכי כלפי מטה בתאוצת הכובד g, כלומר ביחס למטוס הגוף נופל נפילה חופשית.

3. תיאור התנועה בנפילה חופשית ממנוחה

כאשר משחררים גוף ממנוחה מנקודה הנמצאת מעל פני הקרקע, ובהזנחת כוח החיכוך עם האוויר, הגוף נע לאורך קו ישר הניצב לקרקע ובתאוצה קבועה של $9.8\,\mathrm{m/s^2}$ $\left(10\,\mathrm{m/s^2}\right)$. בסעיף זה נלמד לבטא את מהירות גוף זה ואת מיקומו כפונקציה של הזמן.

3.1. המהירות כפונקציה של הזמן בנפילה חופשית ממנוחה

במקרה זה, על מנת לתאר את מהירות הגוף כפונקציה של הזמן יש לבחור קודם ציר תנועה אותו נסמן באות y. נדון בבעיה עבור שני צירים שונים, שראשיתם בנקודה שממנה שוחרר הגוף; הראשון, ציר שכיוונו החיובי כלפי מעלה (איור 6א) והשני שכיוונו החיובי כלפי מטה (איור 6ב).



איור 6: (א) הכיוון החיובי כלפי מעלה. (ב) הכיוון החיובי כלפי מטה.

מכיוון שהתנועה היא תנועה בקו ישר ובתאוצה קבועה נקבל שהמהירות כפונקציה של הזמן נתונה על ידי:

$$v = v_0 + at \tag{3}$$

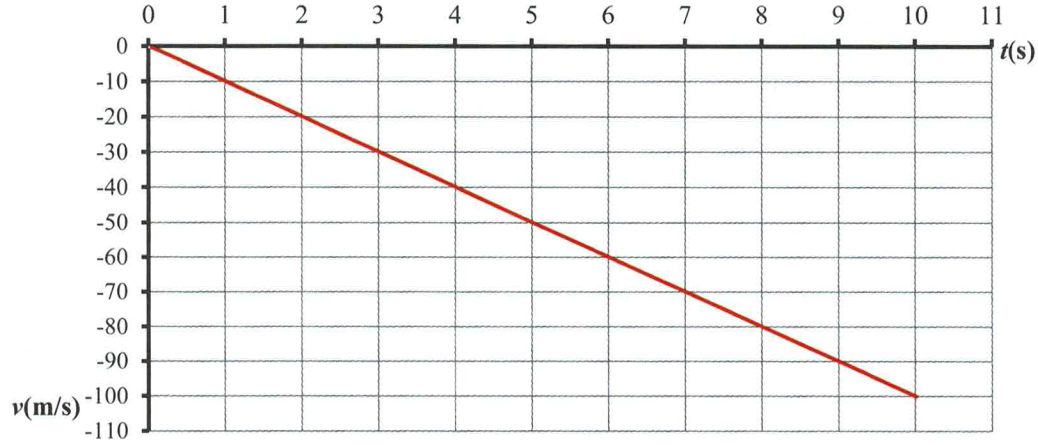
כאשר $v_0 = 0$ היא המהירות ההתחלתית, ו-a היא תאוצת הגוף, שהיא תאוצת הנפילה החופשית. עבור הציר שבאיור 6א מתקיים $a = -g = -10\,\mathrm{m/s^2}$, וזאת בגלל שכיוון התאוצה הוא בכיוון השלילי של הציר. לכן במקרה זה נקבל:

$$v = -gt = -10t \tag{4}$$

על סמך ביטוי זה נקבל את הטבלה הבאה, המתארת את מהירותו של גוף שנופל ממנוחה בנפילה חופשית, מרגע שחרורו ב-$t = 0$ ועד $t = 10\,\mathrm{s}$:

$t\,(\mathrm{s})$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$v\,(\mathrm{m/s})$	0	-10	-20	-30	-40	-50	-60	-70	-80	-90	-100

הגרף המתואר באיור 7, מתאר את המהירות כפונקציה של הזמן במקרה זה:

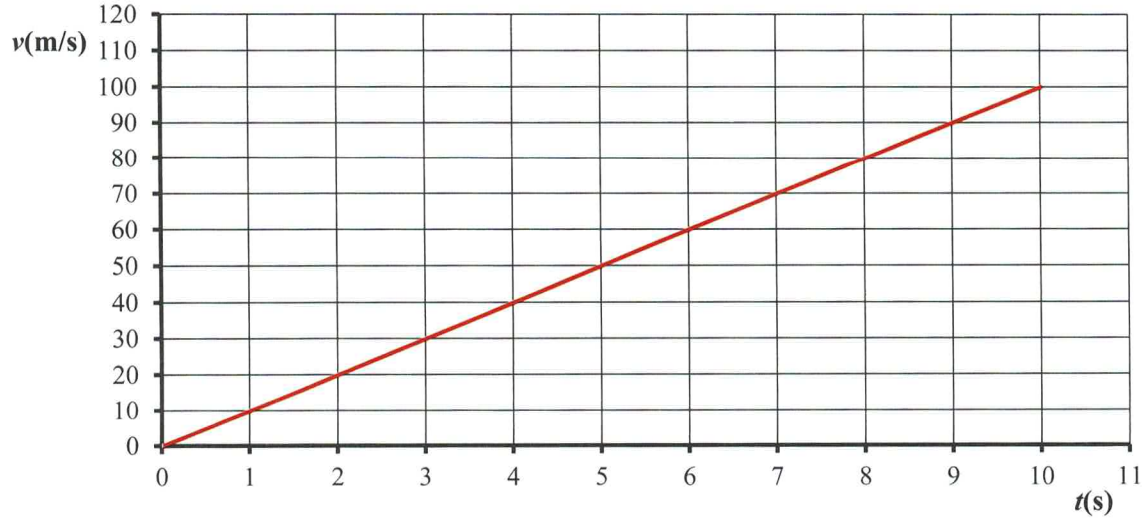


איור 7: המהירות כפונקציה של הזמן בנפילה חופשית ממנוחה, כאשר הכיוון החיובי כלפי מעלה.

עבור ציר שכיוונו החיובי כלפי מטה (ראה איור 6ב) נקבל שתאוצת הגוף חיובית, כך שמתקיים: $a = g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. במקרה זה המשוואה עבור מהירות הגוף תהייה:

$$v = gt = 10t \tag{5}$$

הגרף המתאר את מהירות הגוף כפונקציה של הזמן במקרה זה מתואר באיור 8:



איור 8: המהירות כפונקציה של הזמן בנפילה חופשית ממנוחה, כאשר הכיוון החיובי כלפי מטה.

שים לב שלאחר 10 שניות מהירות הגוף הנופל נפילה חופשית ממנוחה היא $100\,\mathrm{m/s}$. מהירות זו שווה ל- $360\,\mathrm{km/h}$.

3.2. המיקום כפונקציה של הזמן בנפילה חופשית ממנוחה

מכיוון שבנפילה חופשית ממנוחה הגוף נע בקו ישר ובתאוצה קבועה, מיקום הגוף כפונקציה של הזמן בתנועה זו נתון על ידי הביטוי:

$$y(t) = y_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 \tag{6}$$

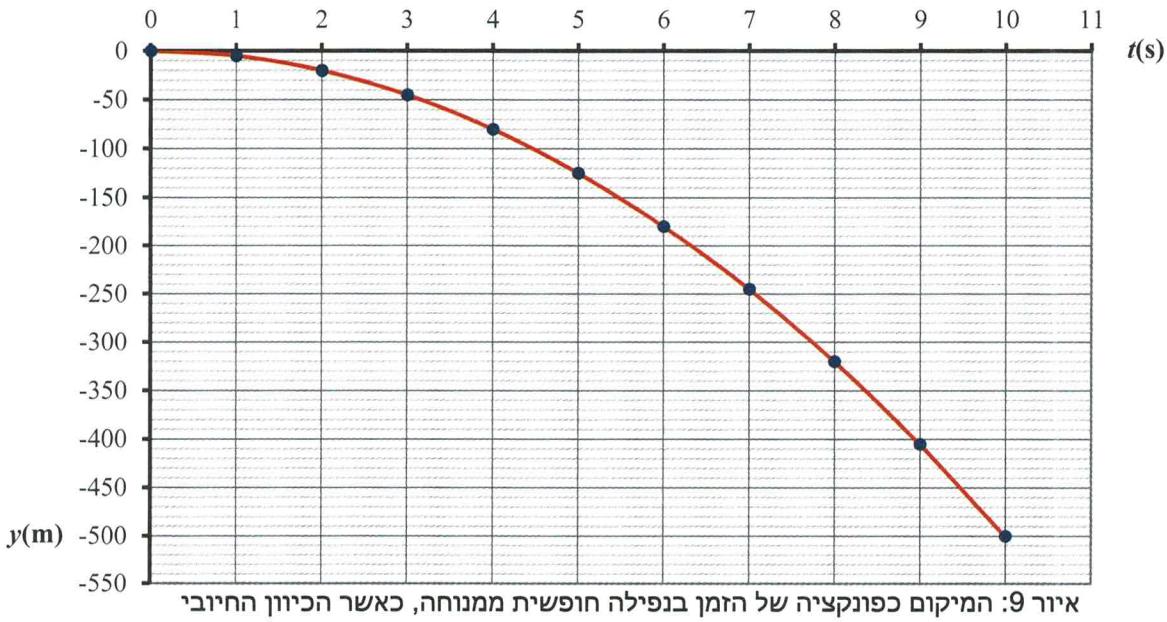
אם נבחר את הכיוון החיובי של הציר כלפי מעלה ואת ראשיתו בנקודת שבה הגוף משוחרר ממנוחה, כפי שמתואר באיור 6א, נקבל: $y_0 = 0$, $v_0 = 0$, ו- $a = -g$. לכן:

$$y = -\tfrac{1}{2}gt^2 = -5t^2 \qquad (7)$$

על סמך ביטוי זה נקבל את הטבלה הבאה, המתארת את מיקום הגוף המשוחרר ממנוחה והנופל נפילה חופשית כפונקציה של הזמן במשך 10 השניות הראשונות החל מרגע שחרורו:

$t(\mathrm{s})$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$y(\mathrm{m})$	0	-5	-20	-45	-80	-125	-180	-245	-320	-405	-500

הגרף באיור 9 מתאר את המיקום כפונקציה של הזמן של גוף זה במשך 10 שניות החל מרגע שחרורו.

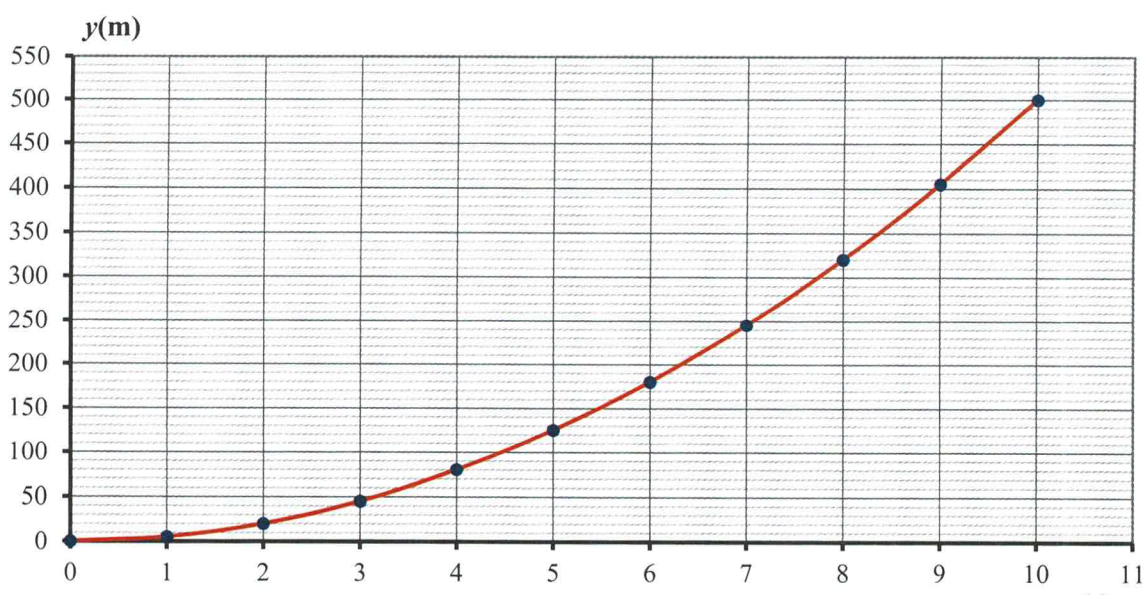


איור 9: המיקום כפונקציה של הזמן בנפילה חופשית ממנוחה, כאשר הכיוון החיובי נבחר כלפי מעלה.

עבור ציר שכיוונו החיובי כלפי מטה (ראה איור 6ב) וראשיתו בנקודה ממנה שוחרר הגוף, נקבל:

$$y = \tfrac{1}{2}gt = 5t^2 \qquad (8)$$

הגרף המתאר את מיקומו של הגוף כפונקציה של הזמן במקרה זה מתואר באיור 10.



איור 10: המיקום כפונקציה של הזמן בנפילה חופשית ממנוחה, כאשר הכיוון החיובי נבחר כלפי מטה.

דוגמאות לנפילה חופשית ממנוחה

דוגמה 1

משחררים גוף ממנוחה מנקודה הנמצאת בגובה 125m מעל פני הקרקע. חשב את הזמן הדרוש לגוף להגיע לקרקע, ואת מהירותו ברגע הפגיעה בה. הזנח את התנגדות האוויר.

הפתרון: נבחר את הכיוון החיובי של ציר ה-y כלפי מטה ואת ראשיתו בנקודה ממנה הגוף שוחרר, ונקבל שמיקום הגוף כפונקציה של הזמן נתון על ידי:

$$y=\tfrac{1}{2}gt^2$$

בזמן הגעת הגוף לקרקע, מתקיים ש-$y=125\,\text{m}$. לכן ברגע פגיעת הגוף בקרקע מתקיים:

$$5t^2=125 \quad \Rightarrow t=5\,\text{s}$$

מהירות הגוף כפונקציה של הזמן נתונה על ידי: $v=10t$, ועבור $t=5\,\text{s}$ נקבל:

$$v(5\,\text{s})=10(5)=50\,\text{m/s}$$

אם נבחר את הכיוון החיובי של ציר ה-y כלפי מעלה ואת הראשית בנקודה ממנה הגוף שוחרר נקבל: $y=-5t^2$. בזמן פגיעת הגוף בקרקע מתקיים ש-$y=-125\,\text{m}$, ולכן:

$$-5t^2=-125 \quad \Rightarrow t=5\,\text{s}$$

ביחס לציר החדש, מהירות הגוף נתונה על ידי: $v=-10t$, ועבור $t=5\,\text{s}$ נקבל:

$$v(5\,\text{s})=-10(5)=-50\,\text{m/s}$$

דוגמה 2

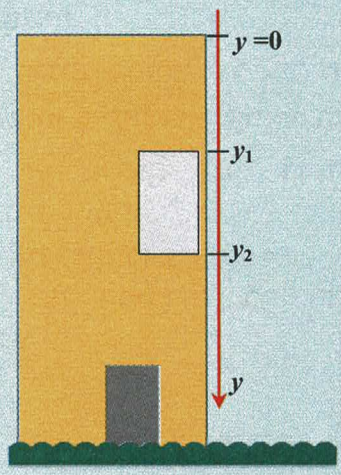
משחררים גוף ממנוחה מקצה גגו של בניין שגובהו 45m. במרחק 20m מקצה הגג נמצא הקצה העליון של חלון שגובהו מטר אחד (ראה תרשים).

בחר את הכיוון החיובי של ציר ה-y כלפי מטה ואת ראשית הצירים בנקודה ממנה שוחרר הגוף וענה על השאלות הבאות:

א. חשב את הזמן הדרוש לגוף לעבור על פני החלון.

ב. חשב את המהירות הממוצעת של הגוף כאשר הוא חולף על פני החלון.

ג. חשב את הזמן הדרוש לגוף להגיע לקרקע, ואת מהירותו ברגע זה.



פתרון:

א. ביחס לציר שבחרנו, מיקום הגוף כפונקציה של הזמן נתון על ידי:

$$y=5t^2$$

אם נסמן את הזמן הדרוש לגוף על מנת להגיע לקצה העליון של החלון (למיקום $y_1=20\,\text{m}$) ב-t_1, נקבל:

$$5t_1^2=20 \quad \Rightarrow t_1=2\,\text{s}$$

אם נסמן את הזמן הדרוש לגוף להגיע לקצה התחתון של החלון (למיקום $y_2=21\,\text{m}$) ב-t_2, נקבל שמתקיים:

$$5t_2^2=21 \quad \Rightarrow t_2=2.05\,\text{s}$$

הזמן Δt שלוקח לגוף לחלוף על פני החלון שווה ל:

$$\Delta t=t_2-t_1=0.05\,\text{s}$$

ב. המהירות הממוצעת של הגוף כאשר הוא חולף על פני החלון נתונה על ידי:

$$\overline{v}=\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{21-20}{2.05-2}=20\,\text{m/s}$$

ג. כאשר הגוף מגיע לקרקע מתקיים:

$$5t^2=45 \quad \Rightarrow t_1=3\,\text{s}$$

מהירותו בזמן זה שווה ל:

$$v=10t=10(3)=30\,\text{m/s}$$

דוגמה 3

משחררים גוף ממנוחה מנקודה הנמצאת בגובה $180\,\mathrm{m}$ מעל פני הקרקע. הגוף נופל נפילה חופשית.

בחר את הכיוון החיובי של ציר ה-y כלפי מטה וראשיתו בנקודה בה שוחרר הגוף.

א. חשב את מיקום הגוף בנקודה שבה מהירותו $40\,\mathrm{m/s}$.

ב. חשב את הזמן בו $v=40\,\mathrm{m/s}$.

ג. חשב את המהירות בה הגוף פוגע בקרקע.

פתרון:

א. ניעזר בקשר הבא שמתקיים עבור תנועה בקו ישר ובתאוצה קבועה:

$$v^2=v_0^2+2a\Delta y=v_0^2+2a\left(y-y_0\right)$$

בבעיה זו מתקיים: $v_0=0$, $v=40\,\mathrm{m/s}$, $a=+g$ ו-$y_0=0$. נציב ונקבל:

$$40^2=0+2(10)(y-0)\ \Rightarrow y=80\,\mathrm{m}$$

ב. מכיוון שהמהירות כפונקציה של הזמן נתונה על ידי: $v=10t$, נקבל:

$$10t=40\ \Rightarrow t=4\,\mathrm{s}$$

ג. ניעזר שוב בקשר:

$$v^2=v_0^2+2a\Delta y$$

כאשר $v_0=0$, $a=+g$ ו-$\Delta y=180\,\mathrm{m}$. נציב ונקבל:

$$v=\pm\sqrt{v_0^2+2a\Delta y}=\pm\sqrt{0+2(10)(180)}$$
$$=\pm 60\,\mathrm{m/s}$$

נבחר בפתרון החיובי כי הגוף נע בכיוון החיובי.

4. תיאור התנועה בזריקה אנכית כלפי מעלה

בסעיף זה נדון בתיאור תנועתו של גוף הנזרק במהירות התחלתית v_0 בכיוון אנכי כלפי מעלה. במקרה זה, אם התנגדות האוויר זניחה, תנועת הגוף נחשבת לנפילה חופשית (כפי שהסברנו בסעיף 2 בפרק זה).

4.1. המהירות כפונקציה של הזמן בזריקה אנכית כלפי מעלה

תנועתו של גוף הנזרק אנכית כלפי מעלה היא תנועה בקו ישר ובתאוצה קבועה. לכן מהירות הגוף במקרה זה מתוארת על ידי הביטוי: $v=v_0+at$, כאשר v_0 היא המהירות ההתחלתית של הגוף ו-a היא תאוצתו, שהיא תאוצת הכובד במקרה זה. אם נבחר את הכיוון החיובי של ציר ה-y כלפי מעלה ונקבע את $y=0$ בנקודה ממנה נזרק הגוף, נקבל שתאוצת הגוף היא $a=-g=-10\,\mathrm{m/s^2}$. שים לב שבשלב עליית הגוף ובשלב חזרתו התאוצה היא זהה - שלילית ושווה ל-$-10\,\mathrm{m/s^2}$. כאשר הגוף עולה הוא מאט בכיוון החיובי ולכן תאוצתו שלילית, וכאשר הוא יורד הוא מאיץ בכיוון השלילי ולכן תאוצתו שלילית גם כן. לכן בזריקה אנכית כלפי מעלה מהירות הגוף כפונקציה של הזמן נתונה על ידי הביטוי:

$$v=v_0-gt=v_0-10t \qquad (9)$$

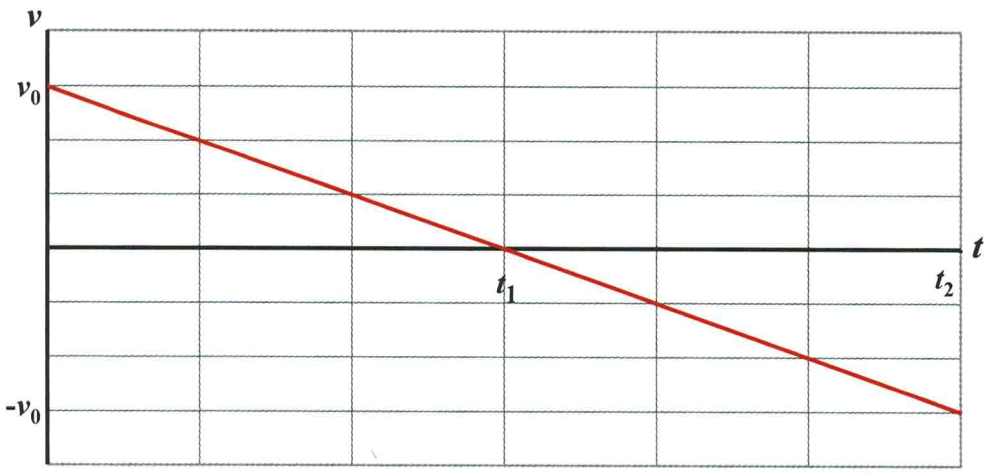
ביטוי זה מתאר את מהירות הגוף כפונקציה של הזמן הן במהלך עליית הגוף והן בחזרתו. במלים אחרות, לא צריך כאן שתי משוואות, אחת עבור שלב העלייה והשנייה עבור שלב החזרה. על מנת להבהיר נקודה זאת, נניח שגוף נזרק בכיוון אנכי כלפי מעלה במהירות התחלתית של $30\,\mathrm{m/s}$. בטבלה הבאה מוצגים ערכי מהירויות הגוף כפונקציה של הזמן, כאשר הערכים של המהירויות התקבלו על סמך משמעות התאוצה בלבד, והיא שמהירות הגוף קטנה בכל שנייה ב-$10\,\mathrm{m/s}$.

$t(\mathrm{s})$	0	1	2	3	4	5	6
$v(\mathrm{m/s})$	30	20	10	0	-10	-20	-30

על פי משוואה (9), במקרה זה מהירות הגוף כפונקציה של הזמן נתונה על ידי: $v=30-10t$. כאשר מציבים במשוואה זו את ערכי הזמנים שבטבלה מתקבלות המהירויות המתאימות לזמנים אלה.

לדוגמה, עבור $t=4\,\mathrm{s}$, נקבל $v=30-10(40)=-10\,\mathrm{m/s}$, וזה אותו ערך שמופע בטבלה.

הגרף שלפניך (איור 11) מתאר את מהירות הגוף הנזרק אנכית כלפי מעלה כפונקציה של הזמן, מרגע זריקתו ב-$t=0$ ועד רגע חזרתו לנקודת המוצא. בחרנו ציר תנועה שכיוונו החיובי כלפי מעלה, כלומר הגרף מתאר את הקשר (9).



איור 11: המהירות כפונקציה של הזמן עבור גוף שנזרק אנכית כלפי מעלה.

מתקיים:

1. בפרק הזמן $0\le t<t_1$ מהירות הגוף חיובית ותאוצתו שלילית. בפרק זמן זה הגוף נע בכיוון החיובי (כלפי מעלה) בתאוטה (גודל מהירותו הולך וקטן).
2. בפרק הזמן $t_1<t\le t_2$ מהירות הגוף שלילית ותאוצתו שלילית. בפרק זמן זה הגוף נע בכיוון השלילי (כלפי מטה) בתאוצה (גודל מהירותו הולך וגדל).
3. בזמן t_1 מהירות הגוף מתאפסת. הגוף נמצא בזמן זה בשיא הגובה. זמן זה מתקבל על יד הצבת $v=0$ במשוואה (9), כך שמתקבל:

$$0=v_0-gt \quad \Rightarrow t_1=\frac{v_0}{g} \tag{10}$$

4. הגובה המקסימלי אליו מגיע הגוף ביחס ל-$y=0$ שווה להעתק שלו עד לזמן $t=t_1$. העתק זה שווה לשטח הכלוא בין עקומת המהירות ובין ציר הזמן מ-$t=0$ ועד $t=t_1$, שהוא שטח משולש הנתון על ידי:

$$y_{\max}=\frac{t_1\times v_0}{2}=\frac{v_0^2}{2g} \tag{11}$$

5. מכיוון שמתקיים שזמן העלייה שווה לזמן החזרה לנקודת המוצא (ההוכחה בתת סעיף 4.2), נקבל שהזמן t_2 באיור 11 שווה ל-$2t_1$:

$$t_2=2t_1=\frac{2v_0}{g} \tag{12}$$

6. הגוף חוזר לנקודת המוצא במהירות השווה בגודלה למהירות ההתחלתית v_0, אבל בכיוון ההפוך. ניתן לקבל זאת על יד הצבת הזמן t_2 ממשוואה (12) במשוואה (9):

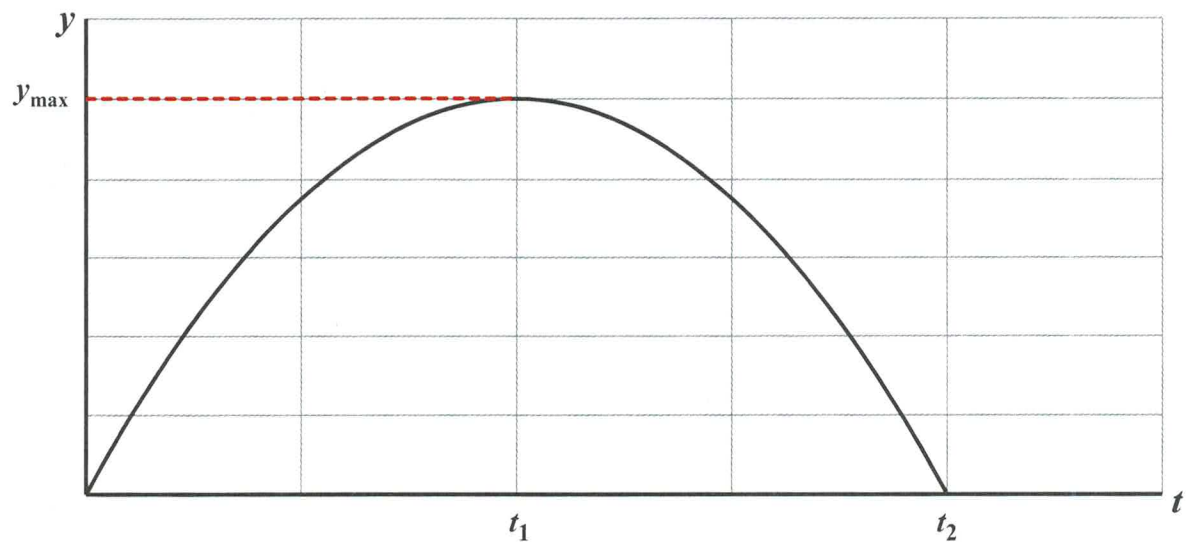
$$v(t_2)=v_0-g\left(\frac{2v_0}{g}\right)=-v_0 \tag{13}$$

4.2. המיקום כפונקציה של הזמן בזריקה אנכית כלפי מעלה

המיקום כפונקציה של הזמן בתנועה בקו ישר ובתאוצה קבועה נתון על ידי הביטוי $y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$. אם נבחר את הכיוון החיובי כלפי מעלה ואת $y = 0$ בנקודה ממנה הגוף נזרק אנכית כלפי מעלה, נקבל ש-$y_0 = 0$ ו-$a = -g$. במקרה זה נקבל שהמיקום כפונקציה של הזמן בזריקה אנכית כלפי מעלה נתון על ידי:

$$y = v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2 \qquad (14)$$

הגרף שמתאר את המיקום כפונקציה של הזמן בזריקה אנכית כלפי מעלה עבור ציר תנועה שכיוונו החיובי כלפי מעלה (הגרף שמתאר את הפונקציה הנתונה על ידי הביטוי האחרון) מוצג באיור 12.



איור 12: גרף המתאר את המיקום כפונקציה של הזמן בזריקה אנכית כלפי מעלה כשהכיוון החיובי נבחר כלפי מעלה

מתקיים:

1. הגרף המתאר את המיקום כפונקציה של הזמן הוא פרבולה שיש לה נקודת מקסימום. המיקום בנקודת המקסימום הוא הגובה המקסימלי, y_{max}, אליו מגיע הגוף ביחס ל-$y = 0$. הגוף מגיע לגובה המקסימלי בזמן t_1 שבו הוא נעצר רגעית. זמן זה, כפי שמצאנו במשוואה (10), נתון על ידי $t_1 = v_0 / g$.
2. על מנת למצוא את הגובה המקסימלי אליו מגיע הגוף, נציב את הזמן $t_1 = v_0 / g$ במשוואה (14) ונקבל:

$$y_{max} = v_0\left(\frac{v_0}{g}\right) - \tfrac{1}{2}g\left(\frac{v_0^2}{g^2}\right) = \frac{v_0^2}{2g} \qquad (15)$$

וזה אותו גודל שקבלנו גם במשוואה (11).

3. על מנת לחשב את הזמן t_2 (איור 12), שהוא הזמן הדרוש לגוף לחזור לנקודת המוצא, נציב $y = 0$ במשוואה (14), ונקבל: $t\left(v_0 - \frac{1}{2}gt\right) = 0$. למשוואה זו יש שני פתרונות, הראשון $t = 0$ שהוא הזמן בו הגוף נזרק כלפי מעלה, והשני הוא $t = 2v_0 / g$ שהוא הזמן t_2 (איור 12),כלומר הזמן שבו הגוף חוזר לנקודת המוצא. מכיוון שמתקיים ש-$t_2 = 2t_1$, כלומר הזמן שחולף מרגע הזריקה ועד לחזרה לנקודת המוצא, כפול מזמן העלייה, ניתן להסיק שזמן העלייה שווה לזמן הירידה.

דוגמאות בזריקה אנכית כלפי מעלה

הערה: בכל הדוגמאות החיכוך עם האוויר זניח.

דוגמה 1

גוף נזרק אנכית כלפי מעלה במהירות התחלתית של $40\,\mathrm{m/s}$ מקצהו של גג בניין שגובהו $100\,\mathrm{m}$. בדרכו חזרה כלפי מטה חולף הגוף לצד הבניין וממשיך בתנועתו האנכית בכיוון הקרקע מבלי לפגוע בבניין. בחר $t=0$ כרגע בו נזרק הגוף, את הכיוון החיובי של ציר ה-y כלפי מעלה ואת $y=0$ בנקודה ממנה נזרק הגוף (קצה גג הבניין), וענה על השאלות הבאות:

א. בטא את מהירות הגוף ואת מיקומו כפונקציה של הזמן.

ב. חשב את הזמן בו הגוף מגיע לגובה המקסימלי וחשב גובה זה ביחס ל-$y=0$.

ג. חשב את הזמן החולף מרגע זריקת הגוף ועד לרגע בו הוא חולף ליד הנקודה ממנה הוא נזרק, ואת מהירותו ברגע זה.

ד. חשב את הזמן הדרוש לגוף להגיע לקרקע.

ה. חשב את המהירות שבה הגוף פוגע בקרקע.

פתרון:

א. מתקיים:

$$v=v_0+at=40-10t$$

$$y=y_0+v_0t+\tfrac{1}{2}at^2=40t-5t^2$$

ב. הגוף מגיע לגובה המקסימלי בזמן שבו מתקיים $v=0$. מהביטוי בפתרון סעיף א' נקבל:

$$40-10t=0\ \Rightarrow t=4\,\mathrm{s}$$

על מנת לחשב את הגובה המקסימלי אליו מגיע הגוף ביחס ל-$y=0$ נציב $t=4\,\mathrm{s}$ במשוואה עבור y שבפתרון סעיף א' ונקבל:

$$y_{\max}=40(4)-5(4)^2=80\,\mathrm{m}$$

ג. הזמן הדרוש לגוף לעבור בחזרתו מהנקודה ממנה נזרק, מתקבל על ידי הצבת $y=0$ במשוואה $y=40t-5t^2$. נציב ונקבל:

$$t(40-5t)=0$$

ממשוואה זו מתקבלים שני פתרונות: $t_1=0$ ו-$t_2=8\,\mathrm{s}$. נבחר ב-$t_2=8\,\mathrm{s}$.

ניתן לקבל תוצאה זו גם על סמך העובדה שזמן החזרה מהגובה המקסימלי לנקודת המוצא שווה לזמן העלייה (שהוא $4\,\mathrm{s}$). לכן הזמן מרגע הזריקה עד לרגע החזרה לנקודת המוצא הוא $8\,\mathrm{s}$.

על מנת לחשב את מהירות הגוף בזמן זה נציב $t=8\,\mathrm{s}$ בביטוי עבור מהירות הגוף ונקבל:

$$v(8\,\mathrm{s})=40-10(8)=-40\,\mathrm{m/s}$$

ד. כאשר הגוף מגיע לקרקע מתקיים ש-$y=-100\,\mathrm{m}$. לכן על מנת לחשב את הזמן הדרוש לגוף להגיע לקרקע ביחס ל-$t=0$, נציב $y=-100\,\mathrm{m}$ בביטוי עבור המיקום ונקבל:

$$-100=40t-5t^2$$

$$\Rightarrow t^2-8t-20=0$$

$$\Rightarrow (t+2)(t-10)=0$$

מתקבלים שני פתרונות: $t_1=-2\,\mathrm{s}$ ו-$t_2=10\,\mathrm{s}$.

נבחר בפתרון החיובי שהוא $10\,\mathrm{s}$.

ה. מהירות הגוף בזמן שבו הוא פוגע בקרקע שווה למהירותו בזמן $t=10\,\mathrm{s}$. נציב זמן זה בביטוי עבור המהירות ונקבל:

$$v(10)=40-10(-10)=-60\,\mathrm{m/s}$$

דוגמה 2

גוף נזרק אנכית כלפי מעלה במהירות של $30\,\mathrm{m/s}$ מקצהו של גג בניין גבוה מאוד. כשהגוף חוזר הוא חולף ליד נקודת הזריקה וממשיך בתנועתו בכיוון הקרקע מבלי לפגוע בבניין. בחר $t=0$ להיות הזמן בו נזרק הגוף, את הכיוון החיובי של ציר ה-y כלפי מעלה ואת $y=0$ בנקודה ממנה נזרק הגוף (קצה גג הבניין), וענה על השאלות הבאות:

א. חשב את הגובה המקסימלי אליו מגיע הגוף ביחס ל-$y=0$.

ב. מצא את המיקום שבו מהירות הגוף שווה ל-$20\,\mathrm{m/s}$ בכיוון מעלה.

ג. מצא את המיקום שבו מהירות הגוף שווה ל-$50\,\mathrm{m/s}$ כלפי מטה.

פתרון:

א. ניעזר בקשר: $v^2=v_0^2+2a\Delta y$ המתקיים בתנועה בקו ישר ובתאוצה קבועה, ממנו

מתקבל:

$$\Delta y = y - y_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

מתקיים בבעיה זו $y_0 = 0$, $a = -g$ ועבור $y = y_{max}$ מתקיים ש-$v = 0$. נציב ונקבל:

$$y_{max} - 0 = \frac{0 - v_0^2}{2(-g)} = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(30)^2}{2(10)} = 45\,\text{m}$$

ב. ניעזר שוב בקשר:

$$y - y_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

ונקבל שעבור $v = 20\,\text{m/s}$ מתקבל:

$$y - 0 = \frac{20^2 - 30^2}{2(-10)} \Rightarrow y = 25\,\text{m}$$

ג. ניעזר שוב בקשר:

$$y - y_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

מכיוון שמהירות הגוף היא $50\,\text{m/s}$ בכיוון מטה נציב $v = -50\,\text{m/s}$ ונקבל:

$$y = \frac{(-50)^2 - 30^2}{2(-10)} = -80\,\text{m}$$

כלומר כאשר הגוף חולף בנקודה הנמצאת $80\,\text{m}$ מתחת לנקודת המוצא, מהירותו תהיה $50\,\text{m/s}$ כלפי מטה.

דוגמה 3

שני גופים 1 ו-2 נזרקים בו זמנית מפני הקרקע בכיוון אנכי כלפי מעלה. הגוף 1 נזרק במהירות התחלתית שגודלה v_0 והגוף 2 נזרק במהירות התחלתית שגודלה $2v_0$. קבע את הזמן בו נזרקו שני הגופים להיות $t = 0$, את הכיוון החיובי כלפי מעלה ואת $y = 0$ על פני הקרקע.

א. מצא את היחס בין הגובה המקסימלי אליו מגיע הגוף 2 לבין הגובה המקסימלי אליו מגיע הגוף 1.

ב. חשב את היחס בין הזמנים שכל אחד משני הגופים שהה באוויר.

ג. חשב את היחס בין מהירויות שני הגופים ברגע פגיעתם בקרקע.

פתרון:

א. מצאנו שהגובה המקסימלי נתון על ידי $y_{max} = v_0^2/(2g)$, כאשר v_0 היא המהירות ההתחלתית. לכן נקבל:

$$y_{max\,2} = \frac{(2v_0)^2}{2g} = \frac{4v_0^2}{2g}$$

$$y_{max\,1} = \frac{v_0^2}{2g}$$

מכאן נקבל:

$$\frac{y_{max\,2}}{y_{max\,1}} = 4$$

ב. מצאנו שהזמן הדרוש לגוף לחזור לקרקע נתון על ידי: $t = 2v_0/g$. לכן נקבל:

$$t_2 = \frac{2(2v_0)}{g}$$

$$t_1 = \frac{2v_0}{g}$$

כאשר t_2 הוא הזמן הדרוש לגוף 2 לחזור לקרקע, ו-t_1 הוא הזמן הדרוש לגוף 1 לחזור לקרקע. משני הקשרים הקודמים מתקבל: $t_2/t_1 = 2$.

ג. כל אחד משני הגופים פוגע בקרקע במהירות ששווה בגודלה למהירותו ההתחלתית שלו, אבל כיוונה הפוך, לכן הגוף 2 פוגע בקרקע במהירות v_2 שנתונה על ידי $v_2 = -2v_0$. הגוף 1 פוגע בקרקע במהירות v_1 הנתונה על יד $v_1 = -v_0$. לכן מתקיים: $v_2/v_1 = 2$.

דוגמה 4

שני גופים נזרקים מפני הקרקע אנכית כלפי מעלה. הגוף הראשון נזרק ברגע $t = 0$ במהירות $20\,\text{m/s}$ ושניה אחר כך (בזמן $t = 1\,\text{s}$) נזרק הגוף השני במהירות $25\,\text{m/s}$. בחר את הכיוון החיובי של ציר ה-y כלפי מעלה ואת $y = 0$ על פני הקרקע, וענה על השאלות הבאות:

א. בטא את מיקום כל אחד משני הגופים כפונקציה של הזמן ביחס ל-$t = 0$.

ב. בטא את המהירות של כל אחד משני הגופים כפונקציה של הזמן ביחס ל-$t = 0$.

ג. מצא את הזמן שבו כל אחד משני הגופים מגיע לגובה המקסימלי שלו, ומצא את הגובה המקסימלי אליו מגיע כל אחד משני גופים אלה.

ד. מצא את הזמן שבו כל אחד משני הגופים

חוזר לקרקע (ביחס ל-$t=0$).

ה. האם שני הגופים חולפים זה על פני זה במהלך תנועתם? אם כן, חשב מתי ובאיזה גובה. אם לא, הסבר.

ו. שרטט במערכת צירים אחת שתי עקומות המתארות את המיקום כפונקציה של הזמן עבור כל אחד משני הגופים מ-$t=0$ ועד הזמן שבו כל אחד מהם חוזר לקרקע.

פתרון:

א. המיקום כפונקציה של הזמן בתנועה בקו ישר ובתאוצה קבועה נתון על ידי הביטוי:

$$y=y_0+v_0t+\tfrac{1}{2}at^2$$

עבור הגוף הראשון מתקיים: $y_0=0$, $v_0=20\,\mathrm{m/s}$ ו-$a=-10\,\mathrm{m/s^2}$. לכן נקבל:

$$y_1=20t-5t^2$$

עבור הגוף השני מתקיים: $y_0=0$, $v_0=25\,\mathrm{m/s}$ ו-$a=-10\,\mathrm{m/s}$. ומכיוון שגוף זה נזרק ב-$t=1\,\mathrm{s}$, נקבל:

$$y_2=25(t-1)-5(t-1)^2$$

ב. עבור הגוף הראשון מתקיים:

$$v_1=v_{01}+at=20-10t$$

ועבור הגוף השני מתקיים:

$$v_2=v_{02}+a(t-1)=25-10(t-1)$$

ג. הגוף הראשון מגיע לגובה המקסימלי כאשר מתקיים $v_1=0$. נציב $v_1=0$ בביטוי עבור v_1 שבפתרון סעיף ב' ונקבל:

$$20-10t=0\ \Rightarrow t=2\,\mathrm{s}$$

הגוף השני מגיע לגובה המקסימלי כאשר מתקיים $v_2=0$. נציב ערך זה בביטוי עבור v_2 שבפתרון סעיף ב' ונקבל:

$$25-10(t-1)=0\ \Rightarrow t=3.5\,\mathrm{s}$$

על מנת לחשב את הגובה המקסימלי אליו מגיע הגוף הראשון נציב $t=2\,\mathrm{s}$ בביטוי עבור y_1 שבסעיף א' ונקבל:

$$y_{1\max}=20(2)-5(2)^2=20\,\mathrm{m}$$

על מנת לחשב את הגובה המקסימלי אליו מגיע הגוף השני נציב $t=3.5\,\mathrm{s}$ בביטוי עבור y_2 שבסעיף א' ונקבל:

$$y_{2\max}=25(3.5-1)-5(3.5-1)^2=31.25\,\mathrm{m}$$

ד. הגוף הראשון חוזר לקרקע כאשר מתקיים $y_1=0$. נציב $y_1=0$ בביטוי עבור y_1 שהתקבל בפתרון סעיף א' ונקבל:

$$20t-5t^2=0$$

ממשוואה זו מתקבלים שני פתרונות, הראשון $t=0$ והשני $t=4\,\mathrm{s}$. נבחר כמובן בפתרון השני.

הגוף השני חוזר לקרקע כאשר מתקיים $y_2=0$. נציב $y_2=0$ בביטוי שהתקבל בפתרון סעיף א' עבור y_2 ונקבל:

$$25(t-1)-5(t-1)^2=0$$

נגדיר משתנה חדש $z=t-1$ ונקבל מהמשוואה האחרונה ש:

$$25z-5z^2=0\ \Rightarrow z(25-5z)=0$$

ממשוואה זו מתקבלים שני פתרונות: $z_1=0$ ו-$z_2=5\,\mathrm{s}$, מכאן נקבל:

$$z_1=t_1-1=0\ \Rightarrow t_1=1\,\mathrm{s}$$

או

$$z_2=t_2-1=5\ \Rightarrow t_2=6\,\mathrm{s}$$

נבחר בפתרון השני ($t_2=6\,\mathrm{s}$), כי הזמן $t_1=1\,\mathrm{s}$ הוא הזמן שבו גוף 2 נזרק כלפי מעלה.

ה. נבדוק האם קיים פתרון עבור המשוואה $y_2=y_1$. נציב y_1 ו-y_2 מסעיף א' ונקבל:

$$20t-5t^2=25(t-1)-5(t-1)^2$$

$$\Rightarrow 15t=30\ \Rightarrow t=2\,\mathrm{s}$$

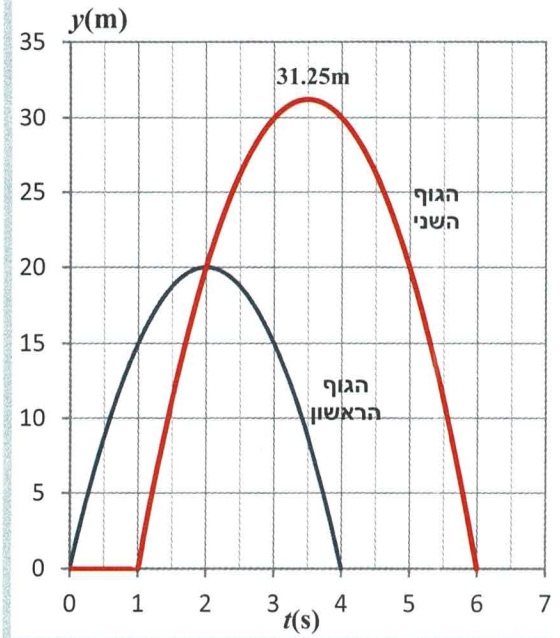
כלומר שני הגופים חולפים זה על פני זה ב-$t=2\,\mathrm{s}$. המיקום שבו שני הגופים חולפים זה על פני זה מתקבל מהצבת $t=2\,\mathrm{s}$ במשוואה עבור y_1 או במשוואה עבור y_2. נציב ונקבל:

$$y_1(2)=y_2(2)=20(2)-5(2)^2=20\,\mathrm{m}$$

ו. יש לשרטט את הגרף המתאר את הפונקציה: $y_1=20t-5t^2$ בתחום $0\le t\le 4\,\mathrm{s}$. ואת הפונקציה:

$$y_2=\begin{cases}0 & 0\le t<1\,\mathrm{s}\\ 25(t-1)-5(t-1)^2 & 1\le t\le 6\,\mathrm{s}\end{cases}$$

מתקבל הגרף הבא:



דוגמה 5

גוף 1 נזרק מפני הקרקע אנכית כלפי מעלה ברגע $t=0$ ובמהירות התחלתית של $30\,\mathrm{m/s}$.
לאחר שנייה אחת נזרק מנקודה סמוכה גוף 2, אף הוא אנכית כלפי מעלה במהירות התחלתית של $20\,\mathrm{m/s}$.
בחר את הכיוון החיובי של ציר ה-y כלפי מעלה ואת $y=0$ על פני הקרקע וענה על השאלות הבאות:

א. בטא את המיקום של כל אחד משני הגופים כפונקציה של הזמן.

ב. בטא את המהירות של כל אחד משני הגופים כפונקציה של הזמן.

ג. מצא את הזמן שבו כל אחד משני הגופים מגיע לגובה המקסימלי שלו מעל פני הקרקע, וחשב גובה זה עבור כל אחד משני הגופים.

ד. קבע האם שני הגופים חולפים זה על פני זה במהלך תנועתם. אם כן מצא מתי והיכן.

ה. מצא את הזמן שבו כל אחד משני הגופים חוזר לקרקע.

ו. שרטט באותה מערכת צירים שתי עקומות המתארות את המיקום כפונקציה של הזמן עבור כל אחד משני הגופים מ-$t=0$ ועד לזמן שבו כל אחד משני הגופים חוזר לקרקע.

ז. מצא את תחום המהירויות בו יש לזרוק את הגוף השני כך שיחלוף על פני הגוף הראשון במהלך תנועתם.

פתרון:

א.

$$y_1 = 30t - 5t^2$$
$$y_2 = 20(t-1) - 5(t-1)^2$$

ב.

$$v_1 = 30 - 10t$$
$$v_2 = 20 - 10(t-1)$$

ג. הגוף הראשון מגיע לגובה המקסימלי כאשר מהירותו מתאפסת, וזה קורה כאשר:

$$30 - 10t = 0 \quad \Rightarrow t = 3\,\mathrm{s}$$

הגובה המקסימלי אליו מגיע גוף זה מתקבל מהצבת $t=3\,\mathrm{s}$ במשוואה עבור y_1:

$$y_{1\max} = 30(3) - 5(3)^2 = 45\,\mathrm{m}$$

הגוף השני מגיע לגובה המקסימלי כאשר מהירותו מתאפסת, וזה קורה כאשר:

$$20 - 10(t-1) = 0 \quad \Rightarrow t = 3\,\mathrm{s}$$

הגובה המקסימלי אליו מגיע גוף זה מתקבל מהצבת $t=3\,\mathrm{s}$ במשוואה עבור y_2:

$$y_2 = 20(3-1) - 5(3-1)^2 = 20\,\mathrm{m}$$

ד. נבדוק אם למשוואה $y_2 = y_1$ קיים פתרון:

$$30t - 5t^2 = 20(t-1) - 5(t-1)^2$$

ממשוואה זו מתקבל $0 = 25$. לכן אין פתרון למשוואה זו, כלומר שני הגופים לא נפגשים.

ה. הזמן שבו הגוף הראשון חוזר לקרקע מתקבל מהצבת $y_1 = 0$ במשוואה עבור y_1. מתקבל:

$$30t - 5t^2 = 0$$
$$\Rightarrow t(30 - 5t) = 0$$

ממשוואה זו נקבל שני פתרונות: $t_1 = 0$ ו-$t_2 = 6\,\mathrm{s}$. נבחר כמובן בפתרון השני.

הזמן שבו הגוף השני חוזר לקרקע מתקבל מהצבת $y_2 = 0$ במשוואה עבור y_2. מתנאי זה מתקבל:

$$20(t-1) - 5(t-1)^2 = 0$$
$$\Rightarrow (t-1)\left[20 - 5(t-1)\right] = 0$$

ממשוואה זו נקבל שני פתרונות, הראשון:

$$t_1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow t_1 = 1\,\mathrm{s}$$

והשני

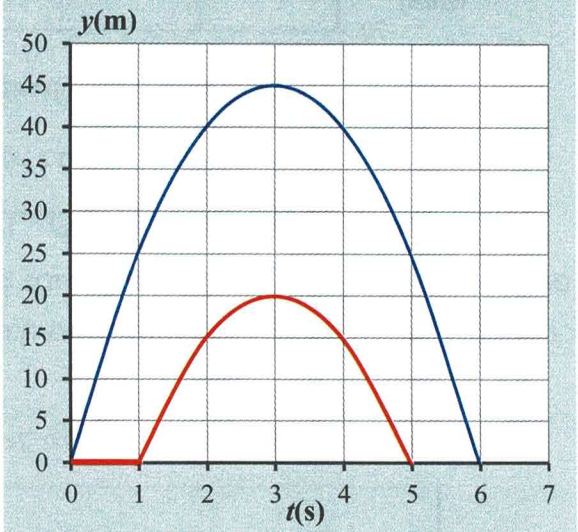
$$20-5(t_2-1)=0 \Rightarrow t_2=5\text{s}$$

נבחר בפתרון השני.

ו. יש לשרטט באותה מערכת צירים את הפונקציה $y_1=30t-5t^2$ בפרק הזמן $0\le t\le 6$, ואת הפונקציה:

$$y_2=\begin{cases}0 & 0\le t<1\text{s}\\ 20(t-1)-5(t-1)^2 & 1\le t<5\text{s}\end{cases}$$

מתקבל הגרף הבא:



ז. על מנת שגוף 2 יחלוף על ליד הגוף 1 במהלך תנועתם, צריך להתקיים שהזמן שבו גוף 2 חוזר לקרקע גדול מ-$t=6\text{s}$ (ראה את הגרף שבסעיף הקודם).

אם נסמן את המהירות ההתחלתית של הגוף השני ב-v_{02} נקבל שהמיקום כפונקציה של הזמן עבור גוף זה נתון על ידי:

$$y_2=v_{02}(t-1)-\tfrac{1}{2}g(t-1)^2$$

גוף זה חוזר לקרקע כאשר מתקיים $y_2=0$:

$$v_{02}(t-1)-5(t-1)^2=0$$

$$\Rightarrow (t-1)\left[v_{02}-\tfrac{1}{2}g(t-1)\right]=0$$

למשוואה האחרונה קיימים שני פתרונות, הראשון $t_1=1\text{s}$, והשני:

$$v_{02}-\tfrac{1}{2}g(t_2-1)=0$$

$$\Rightarrow t_2=\frac{2v_{02}}{g}+1$$

על מנת שגוף 2 יחלוף על פני גוף 1 במהלך תנועת שני הגופים צריך להתקיים:

$$t_2=\frac{2v_{02}}{g}+1>6 \quad \Rightarrow v_{02}>25\,\text{m/s}$$

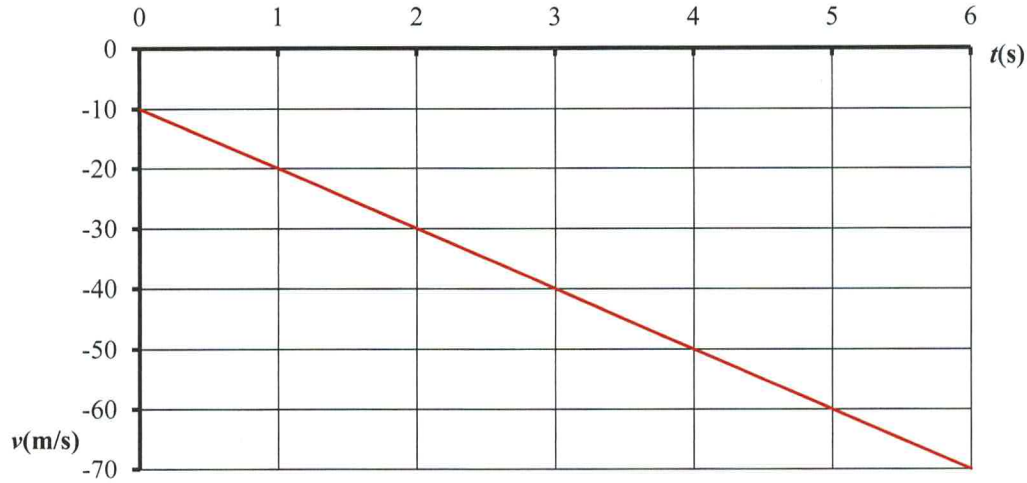
5. תיאור התנועה בזריקה אנכית כלפי מטה

בסעיף זה נדון בתיאור תנועתו של גוף הנזרק במהירות התחלתית v_0 בכיוון אנכי כלפי מטה. במקרה זה, אם התנגדות האוויר זניחה, תנועת הגוף נחשבת לנפילה חופשית (כפי שהסברנו בסעיף 2 בפרק זה).

5.1 המהירות כפונקציה של הזמן בזריקה אנכית כלפי מטה

תנועתו של גוף הנזרק אנכית כלפי מטה היא תנועה בקו ישר ובתאוצה קבועה. לכן מהירות הגוף במקרה זה מתוארת על ידי הביטוי: $v=v_0+at$, כאשר v_0 היא המהירות ההתחלתית של הגוף ו-a היא תאוצתו, שהיא תאוצת הכובד גם במקרה זה. אם נבחר את הכיוון החיובי של ציר ה-y כלפי מעלה (ואת $y=0$ בנקודה ממנה נזרק הגוף), נקבל שמהירות הגוף שלילית $(v_0<0)$ ותאוצתו $a=-g=-10\,\text{m/s}^2$.

לדוגמה, גוף נזרק אנכית כלפי מטה במהירת התחלתית של $10\,\text{m/s}$. אם נבחר את הכיוון החיובי כלפי מעלה נקבל ש-$v_0=-10\,\text{m/s}$ ו-$a=-10\,\text{m/s}^2$. במקרה זה נקבל שמהירות הגוף כפונקציה של הזמן נתונה על ידי: $v=-10-10t$. הגרף באיור 13 מתאר את מהירות הגוף כפונקציה של הזמן במקרה זה.



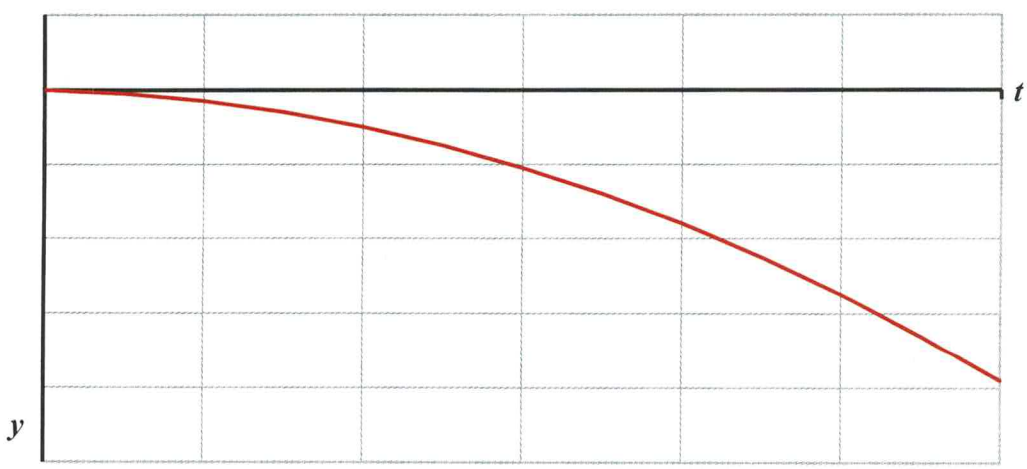
איור 13: המהירות כפונקציה של הזמן בזריקה אנכית כלפי מטה.

רואים שמהירות הגוף (בערכה המוחלט) גדלה עם הזמן במקרה זה.

5.2. המיקום כפונקציה של הזמן בזריקה אנכית כלפי מטה

בזריקה אנכית מיקום הגוף הנזרק כפונקציה של הזמן נתון על ידי הביטוי: $y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$. אם נבחר את הכיוון החיובי כלפי מעלה ואת $y = 0$ בנקודה ממנה נזרק הגוף ונקבל $y_0 = 0$ ו- $a = -g$. במקרה זה נקבל: $y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ כאשר $v_0 < 0$.

הגרף המתאר במקרה זה את מיקום הגוף כפונקציה של הזמן הוא פרבולה (ראה איור 14).



איור 14: המיקום כפונקציה של הזמן בזריקה אנכית כלפי מטה כאשר הכיוון החיובי נבחר כלפי מעלה.

דוגמאות לזריקה אנכית כלפי מטה

דוגמה 1

גוף נזרק אנכית כלפי מטה במהירות שגודלה $20\,\mathrm{m/s}$ מגג בניין שגובהו $60\,\mathrm{m}$. בחר את הכיוון החיובי של ציר ה-y כלפי מטה, $y = 0$ בקצה גג הבניין ו-$t = 0$ הזמן שבו הגוף נזרק.

א. בטא את מהירות הגוף ואת מיקומו כפונקציה של הזמן.

ב. מצא את הזמן שבו הגוף מגיע לקרקע.

ג. חשב את המהירות שבה הגוף פוגע בקרקע.

ד. שרטט גרפים המתארים את מהירות הגוף ואת מיקומו כפונקציה של הזמן החל מ-$t = 0$ ועד לזמן הפגיעה בקרקע.

פתרון:

א. על פי הציר הנבחר נקבל:

$$v=20+10t$$

$$y=20t+5t^2$$

ב. הגוף מגיע לקרקע כאשר $y=60\,\text{m}$. נציב $y=60\,\text{m}$ בביטוי עבור המיקום ונקבל:

$$60=20t+5t^2$$

$$\Rightarrow t^2+4t-12=0$$

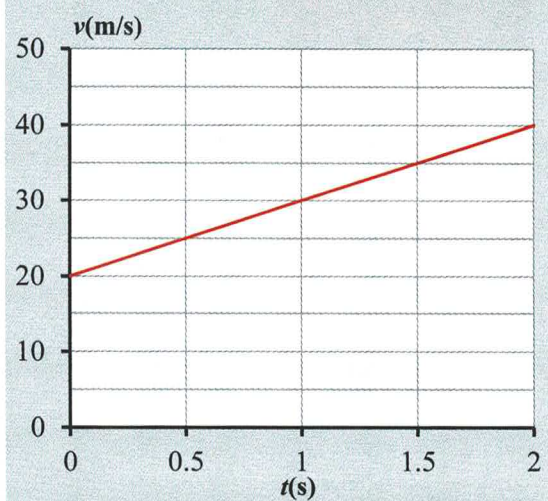
$$\Rightarrow (t+6)(t-2)=0$$

למשוואה זו יש שני פתרונות: $t_1=-6\,\text{s}$ ו- $t_2=2\,\text{s}$. נבחר כמובן בפתרון החיובי.

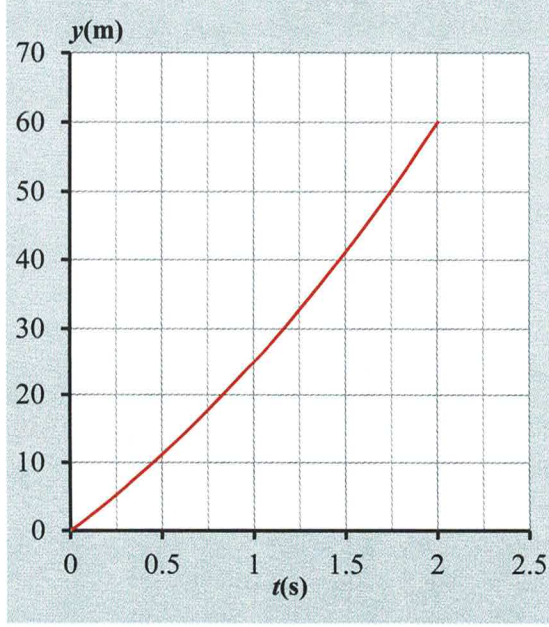
ג. המהירות שבה הגוף פוגע בקרקע שווה למהירותו ב-$t=2\,\text{s}$. נציב $t=2\,\text{s}$ בביטוי עבור המהירות ונקבל:

$$v(2)=20+10(2)=40\,\text{m/s}$$

ד. המהירות כפונקציה של הזמן:



המקום כפונקציה של הזמן:



דוגמה 2

גוף נזרק אנכית כלפי מטה מגגו של בניין שגובהו $40\,\text{m}$, בזמן שנקבע להיות $t=0$, במהירות התחלתית של $10\,\text{m/s}$. ב-$t=1\,\text{s}$ נזרק גוף אחר מאותה נקודה, אף הוא אנכית כלפי מטה.

א. בטא את מיקום הגוף הראשון כפונקציה של הזמן.

ב. מצא את הזמן שבו הגוף הראשון מגיע לקרקע.

ג. מצא את גודל המהירות ההתחלתית שיש להקנות לגוף השני על מנת ששני הגופים יפגעו בקרקע בו זמנית.

ד. חשב את המהירות שבה כל אחד משני הגופים פוגע בקרקע.

ה. שרטט באותה מערכת צירים שתי עקומות המתארות את המיקום כפונקציה של הזמן של שני הגופים בפרק הזמן מ-$t=0$ ועד לזמן הפגיעה בקרקע.

פתרון:

א. נבחר את הכיוון החיובי של ציר ה-y כלפי מטה ואת $y=0$ בנקודה ממנה נזרקו שני הגופים ונקבל עבור הגוף הראשון ש-$y_{01}=0$, $v_{01}=10\,\text{m/s}$ ו-$a_1=10\,\text{m/s}^2$. לכן מיקומו של הגוף הראשון כפונקציה של הזמן נתון באמצעות הביטוי:

$$y_1=10t+5t^2$$

ב. על מנת לחשב את הזמן שבו הגוף הראשון מגיע לקרקע, נציב $y_1=40\,\text{m}$ בביטוי עבור y_1, ונקבל:

$$40=10t+5t^2$$

$$\Rightarrow t^2+2t-8=0$$

$$\Rightarrow (t+4)(t-2)=0$$

למשוואה האחרונה יש שני פתרונות: $t_1=-4\,\text{s}$ ו-$t_2=2\,\text{s}$. נבחר בפתרון השני.

ג. אם נסמן את המהירות שבה נזרק הגוף השני ב-v_{02}, נקבל שהמיקום כפונקציה של הזמן עבור הגוף השני נתון על ידי הביטוי:

$$y_2=v_{02}(t-1)+5(t-1)^2$$

שים לב שהגוף השני נזרק בזמן $t=1\,\text{s}$. על מנת ששני הגופים יגיעו בו זמנית לקרקע צריך להתקיים עבור הגוף השני התנאי

$y_2(2\text{s})=40\,\text{m}$. מתנאי זה ומהביטוי עבור y_2 נקבל:

$$40=v_{02}(2-1)+5(2-1)^2$$
$$\Rightarrow v_{02}=35\,\text{m/s}$$

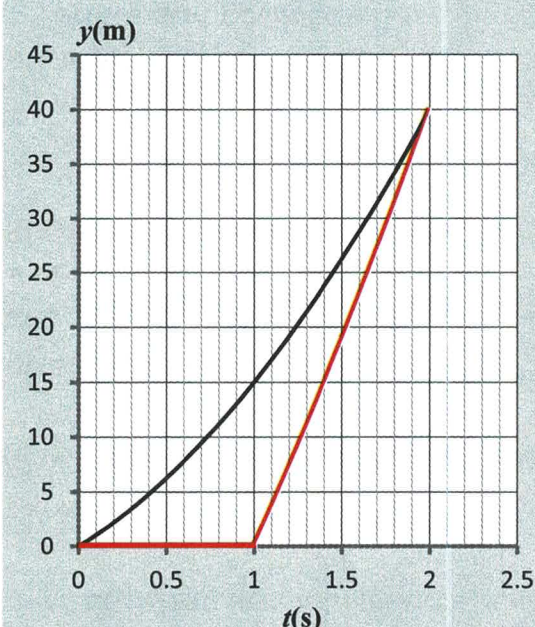
ד. נבטא קודם את המהירות כפונקציה של הזמן עבור כל אחד משני הגופים:

$$v_1=10+10t$$
$$v_2=35+10(t-1)$$

שני הגופים מגיעים לקרקע ב-$t=2\text{s}$. לכן נקבל:

$$v_1(2\text{s})=10+10(2)=30\,\text{m/s}$$
$$v_2(2\text{s})=35+10(2-1)=45\,\text{m/s}$$

ה.



דוגמה 3

שני גופים 1 ו-2 נזרקים בו זמנית ברגע $t=0$. הראשון נזרק אנכית כלפי מעלה מנקודה הנמצאת על הקרקע לרגלי בניין שגובהו $60\,\text{m}$, והשני אנכית כלפי מטה מקצה גגו של הבניין כפי שמתואר בתרשים שלפניך.

הגוף הראשון נזרק במהירות התחלתית שגודלה $25\,\text{m/s}$ (כלפי מעלה) והשני במהירות התחלתית שגודלה $5\,\text{m/s}$ (כלפי מטה).

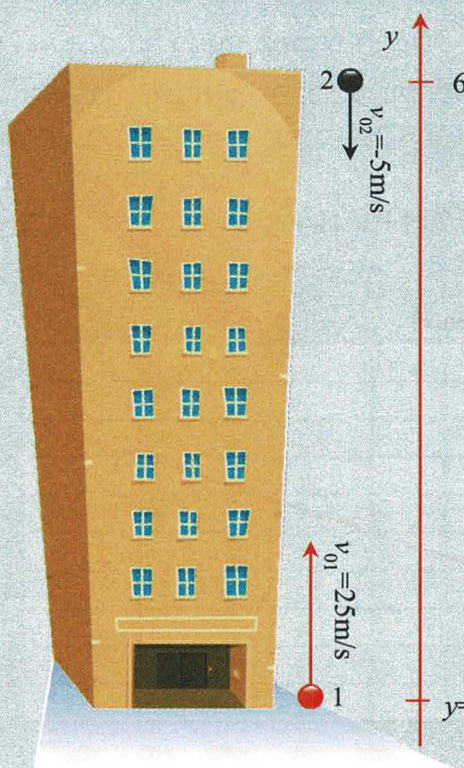
בחר את הכיוון החיובי כלפי מעלה, את $y=0$ על פני הקרקע וענה על השאלות הבאות:

א. בטא את המיקום כפונקציה של הזמן עבור כל אחד משני הגופים.

ב. מצא את הזמן והמיקום שבו שני הגופים חולפים זה על פני זה.

ג. חשב את מהירות כל אחד משני הגופים בזמן שבו הם חולפים זה על פני זה.

ד. שרטט גרף המתאר את המרחק בין שני הגופים $(d=y_2-y_1)$ כפונקציה של הזמן מ-$t=0$ ועד לזמן המפגש בין שני הגופים.



ה. הסבר למה הגרף שהתקבל בסעיף הקודם הוא קווי, והסבר את משמעות שיפוע גרף זה.

ו. חשב את הזמן הדרוש לכל אחד משני הגופים להגיע לקרקע.

ז. שרטט באותה מערכת צירים שתי עקומות, הראשונה המתארת את מיקומו של הגוף 1 כפונקציה של הזמן מ-$t=0$ ועד לזמן שבו הוא מגיע לקרקע, והשנייה מתארת את מיקומו של גוף 2 מ-$t=0$ ועד לזמן שבו הוא מגיע לקרקע.

פתרון:

א.

$$y_1=y_{01}+v_{01}t-\tfrac{1}{2}gt^2=25t-5t^2$$
$$y_2=y_{02}+v_{02}t-\tfrac{1}{2}gt^2=60-5t-5t^2$$

ב. שני הגופים חולפים זה על פני זה כאשר מתקיים $y_1 = y_2$. הצבת y_1 ו-y_2 מסעיף א' בקשר האחרון נותן:

$$25t - 5t^2 = 60 - 5t - 5t^2$$
$$\Rightarrow 30t = 60 \quad \Rightarrow t = 2\,\text{s}$$

המקום שבו שני הגופים חולפים זה על פני זה הוא:

$$y_1(2) = y_2(2) = 25(2) - 5(2)^2 = 30\,\text{m}$$

ג. המהיריות כפונקציה של הזמן עבור שני הגופים נתונות על ידי שני הביטויים:

$$v_1 = 25 - 10t$$
$$v_2 = -5 - 10t$$

מכאן מתקבל:

$$v_1(2) = 25 - 10(2) = 5\,\text{m/s}$$
$$v_2(2) = -5 - 10(2) = -25\,\text{m/s}$$

ד.

$$d = y_2 - y_1 = \left(60 - 5t - 5t^2\right) - \left(25t - 5t^2\right) =$$
$$\Rightarrow d = 60 - 30t$$

הגרף המוצג בתרשים הבא מתאר את d כפונקציה של הזמן:

ה. המרחק בין שני הגופים 2 ו-1 קטן בקצב השווה למהירות גוף 2 ביחס לגוף 1 (v_{12}). גודל מהירות זו הוא:

$$v_{21} = v_2 - v_1 =$$
$$= \left(-5 - 10t\right) - \left(25 - 10t\right) = -30\,\text{m/s}$$

מהתוצאה האחרונה מתקבל שהמרחק בין גוף 2 לגוף 1 קטן בקצב קבוע שהוא המהירות היחסית ביניהם, $v_{21} = -30\,\text{m/s}$.

ניתן לבטא את d בתלות בגובה הבניין H, v_{01}, v_{02} והזמן t. מתקיים:

$$y_1 = v_{01}t - 5t^2$$
$$y_2 = H + v_{02}t - 5t^2$$

כאשר $v_{01} = 25\,\text{m}$ ו-$v_{02} = -5\,\text{m/s}$. מהביטויים עבור y_1 ו-y_2 נקבל:

$$d = y_2 - y_1 = H + \left(v_{02} - v_{01}\right)t =$$
$$= 60 + \left(-5 - 25\right)t = 60 - 30t$$

על פי ביטוי זה מתקבל שהגרף המתאר את d כפונקציה של הזמן t הוא קשר לינארי המקיים:

1. שיפועו הוא מהירות גוף 2 ביחס לגוף 1 שהיא $v_{21} = -30\,\text{m/s}$.
2. מתחיל ב-$t = 0$ מערך השווה למרחק ההתחלתי בין שני הגופים $\left(H = 60\,\text{m}\right)$.
3. ב-$t = 2\,\text{s}$, זמן המפגש בין שני הגופים, d מתאפס.

ו. הזמן הדרוש לגוף הראשון להגיע לקרקע מתקבל מהצבת $y_1 = 0$:

$$0 = 25t - 5t^2$$
$$\Rightarrow t\left(25 - 5t\right) = 0$$

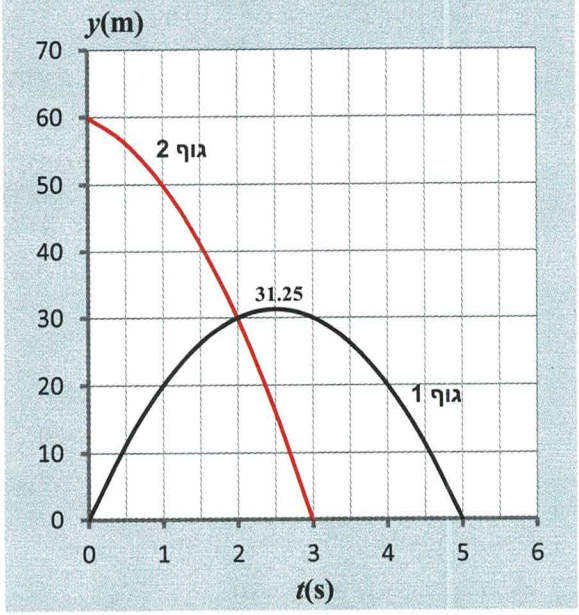
למשוואה זו קיימים שני פתרונות, הראשון $t_1 = 0$ והשני $t_2 = 5\,\text{s}$. בוחרים בפתרון השני.

הזמן הדרוש לגוף השני להגיע לקרקע מתקבל מהצבת $y_2 = 0$:

$$0 = 60 - 5t - 5t^2$$
$$\Rightarrow t^2 + t - 12 = 0$$
$$\Rightarrow (t+4)(t-3) = 0$$

גם למשוואה זו קיימים שני פתרונות, הראשון $t_1 = -4\,\text{s}$ והשני $t_2 = 3\,\text{s}$. בוחרים בפתרון השני.

ז.



סיכום פרק 3

1. גופים המשוחררים ממנוחה בקרבת פני כדור הארץ, או בקרבת פני כוכב לכת אחר או בקרבת פני הירחים של כוכבי הלכת, ובהזנחת כוח החיכוך עם האוויר במקרים בהם יש לכוכב אטמוספירה, נעים בתאוצה קבועה בכיוונה ובקירוב טוב גם בגודלה. כיוונה של תאוצה זו הוא בכיוון מרכז הכוכב או הירח, וגודלה שונה מכוכב לכת אחד לאחר. מכיוון שתאוצה זו נובעת מכוח הכובד הפועל על הגוף הנופל, היא נקראת **תאוצת הכובד**, ומסומנת באות g (מהמונח הלועזי gravity acceleration).
2. גודלה של תאוצת הכובד בקרבת פני כדור הארץ הוא $9.8\,\mathrm{m/s^2}$, בערך. לשם נוחות נשתמש בחישובים בקירוב שתאוצה זו היא $10\,\mathrm{m/s^2}$.
3. נפילה חופשית היא תנועת גוף בהשפעת כוח הכובד בלבד. הגופים הנופלים חופשית על פני כוכב לכת (כלומר הנעים בהשפעת כוח הכובד של כוכב הלכת, בלבד), נעים בתאוצה שהיא תאוצת הכובד, ומכיוון שתנועת גופים אלה נקראת נפילה חופשית, תאוצתם נקראת גם תאוצת **הנפילה החופשית**. ברור שתאוצת הנפילה החופשית שווה בגודלה ובכיוונה לתאוצת הכובד.
4. כאשר גוף משוחרר מגובה מסוים מעל פני הקרקע, נזרק אנכית כלפי מעלה או כלפי מטה או נזרק בזווית כלשהי, ובהעדר החיכוך עם האוויר, תנועתו נקראת נפילה חופשית בגלל שבמקרים אלה הגוף נע תחת השפעת כוח הכובד בלבד. באותו עיקרון, גם תנועת הירח סביב כדור הארץ או תנועת לוויין סביב כדור הארץ נחשבת לנפילה חופשית.
5. כאשר גוף משוחרר ממנוחה, ובהזנחת כוח החיכוך עם האוויר, הגוף נופל חופשית. אם נבחר את הכיוון החיובי של ציר y כלפי מעלה ואת $y=0$ בנקודה ממנה הגוף שוחרר נקבל $a=-g=-10\,\mathrm{m/s^2}$. במקרה זה מהירות הגוף נתונה על ידי הביטוי: $v=-10t$ ומיקומו כפונקציה של הזמן נתון על ידי: $y=-\frac{1}{2}gt=-5t^2$.
6. כאשר גוף נזרק אנכית כלפי מעלה במהירות התחלתית v_0, ובהזנחת כוח החיכוך עם האוויר, הגוף נופל חופשית. אם נבחר את הכיוון החיובי של ציר y כלפי מעלה ואת $y=0$ בנקודה ממנה הגוף נזרק נקבל $a=-g=-10\,\mathrm{m/s^2}$. במקרה זה מהירות הגוף נתונה על ידי הביטוי: $v=v_0-gt$ ומיקומו כפונקציה של הזמן נתון על ידי: $y=v_0t-\frac{1}{2}gt$.

הזמן הדרוש לגוף להגיע לגובה המקסימלי במקרה זה הוא $t'=v_0/g$ והגובה המקסימלי אליו מגיע הגוף נתון על ידי הביטוי: $y_{\max}=v_0^2/(2g)$.

תרגילים ובעיות – פרק 3

1 + 2. תאוצת הכובד והנפילה החופשית

.1

א. הגדר את תאוצת הכובד, וציין מהו ערכה המקורב על פני כדור הארץ.

ב. חשב מהו היחס בין תאוצת הכובד על פני כדור הארץ ותאוצת הכובד על פני הירח.

ג. מנה 4 תכונות של תאוצת הכובד.

ד. באילו תנאים ניתן להתייחס לגודל תאוצת הכובד כקבוע.

.2

א. מהי טענת אריסטו לגבי הזמן הדרוש לגופים המשוחררים מאותו גובה להגיע אל פני הקרקע?

ב. מהי התצפית שהובילה את גלילאו גליליי למסקנה שטענת אריסטו שגויה?

ג. הסבר את הניסוי המחשבתי שערך גלילאו גליליי ואשר הראה שטענת אריסטו שגויה ושגופים שונים המשוחררים ממנוחה מאותו גובה מעל פני הקרקע מגיעים לקרקע באותו זמן (בהזנחת התנגדות האוויר).

.3

א. הגדר נפילה חופשית.

ב. מהו גודל תאוצת הנפילה החופשית בקרבת פני כדור הארץ?

ג. קבע אילו מבין התנועות הבאות נחשבות לנפילה חופשית:

1) בלון נפוח המשוחרר ממנוחה בחלל החדר.

2) קליע הנורה בזווית מסוימת ביחס לאופק. נתון שהתנגדות האוויר זניחה.

3) תנועת לוויין הסובב סביב כדור הארץ.

4) גוף המחליק על מישור משופע חלק.

5) תנועת הירח סביב כדור הארץ.

3. נפילה חופשית ממנוחה

.4

משחררים גוף ממנוחה מגובה מסוים מעל פני הקרקע. נתון כי התנגדות האוויר זניחה.

א. בחר את הכיוון החיובי של ציר ה-y כלפי מעלה ואת ראשיתו על פני הקרקע ושרטט גרפים המתארים באופן איכותי את מהירות הגוף ואת מיקומו כפונקציה של הזמן.

ב. ענה על הסעיף הקודם אם הכיוון החיובי של ציר ה-y כלפי מטה וראשיתו היא הנקודה שממנה הגוף משוחרר.

.5

משחררים גוף ממנוחה ב-$t=0$ מנקודה הנמצאת בגובה $80\,\mathrm{m}$ מעל הקרקע. התנגדות האוויר זניחה.

א. בחר את הכיוון החיובי של ציר ה-y כלפי מטה וראשיתו בנקודה ממנה שוחרר הגוף וחשב את:

1) הזמן שבו הגוף מגיע לקרקע.

2) המהירות שבה הגוף פוגע בקרקע.

ב. ענה על הסעיף הקודם אם בוחרים את הכיוון החיובי של הציר כלפי מעלה ואת ראשיתו על פני הקרקע.

.6

משחררים גוף ממנוחה מגגו של בניין גבוה מאוד. בחר את הכיוון החיובי כלפי מטה, את הראשית בנקודה ממנה שוחרר הגוף, את הזמן שבו הגוף שוחרר כ-$t=0$ וענה על הסעיפים הבאים. הזנח את התנגדות האוויר.

א. מצא את המיקום שבו מהירות הגוף היא $50\,\mathrm{m/s}$.

ב. חשב את העתקי הגוף בשניות; החמישית, הששית והשביעית של תנועתו.

ג. חשב את המהירות הממוצעת של הגוף בפרק הזמן מ-$t=5\,\mathrm{s}$ ועד $t=8\,\mathrm{s}$.

ד. חשב את השינוי במהירות הגוף בפרק הזמן מ-$t=5\,\mathrm{s}$ ועד $t=8\,\mathrm{s}$.

.7

משחררים גוף ממנוחה מגובה h מעל פני הקרקע. חשב את h אם נתון שהגוף עובר $20\,\mathrm{m}$ בשנייה האחרונה לפני פגיעתו בקרקע. הזנח את התנגדות האוויר.

.8

משחררים ממנוחה שני גופים, 1 ו-2. גוף 1 משוחרר מגובה h וגוף 2 מגובה $2h$ מעל פני

הקרקע. התנגדות האוויר זניחה. חשב את:

א. היחס t_2/t_1, כאשר t_2 הוא הזמן הדרוש לגוף 2 להגיע לקרקע ו-t_1 הוא הזמן הדרוש לגוף 1 להגיע לקרקע.

ב. היחס v_2/v_1, כאשר v_2 היא המהירות שבה גוף 2 פוגע בקרקע ו-v_1 היא המהירות שבה גוף 1 פוגע בקרקע.

.9

אסטרונאוטים נחתו על פני כוכב לכת, וביצעו את הניסוי הבא למדידת תאוצת הכובד על פניו: הם שחררו גוף ממנוחה מגבהים שונים ועבור כל גובה מדדו, בעזרת חיישן מיוחד, את הזמן הדרוש לגוף להגיע לפני כוכב הלכת. בטבלה הבאה מתוארות חלק מהתוצאות שקיבלו האסטרונאוטים:

הגובה $h(\mathrm{m})$	הזמן $t(\mathrm{s})$
0.5	0.50
1.0	0.70
1.5	0.87
2.0	1.00
2.5	1.10

נתון שלכוכב הלכת אין אטמוספירה.

א. התבסס על חוקי הפיזיקה והוכח שמתקיים הקשר הבא בין הזמן t לבין הגובה h ממנו שוחרר הגוף: $t^2=(2/g')h$, כאשר g' היא תאוצת הכובד על פני כוכב הלכת.

ב. היעזר בקשר שבסעיף ב' ובתוצאות המוצגות בטבלה, ושרטט גרף לינארי המציג את תוצאות המדידות.

ג. העזר בגרף ששרטטת בסעיף הקודם וחשב את תאוצת הכובד על פני כוכב הלכת.

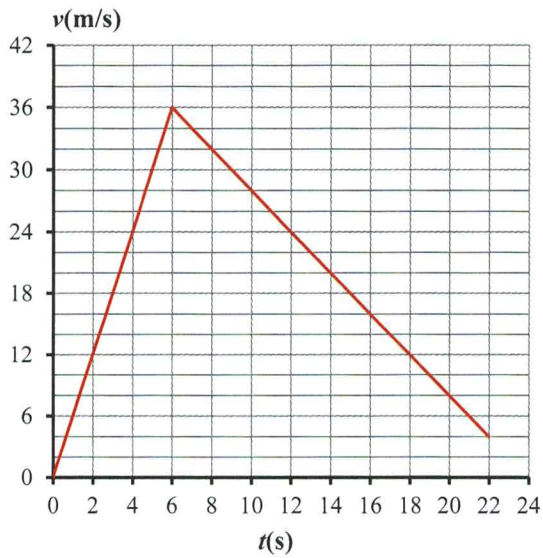
ד. נניח שמשחררים שני גופים מאותו גובה, הראשון על פני כוכב הלכת והשני על פני כדור הארץ, ומודדים את זמני נפילתם אל הקרקע. חשב את היחס בין שני זמנים אלה.

.10

גוף משוחרר ממנוחה מקצה גגו של בניין. במהלך נפילתו, הגוף עובר ליד חלון שגובהו $0.8\,\mathrm{m}$ ועובר אותו בזמן של $0.04\,\mathrm{s}$. חשב את המרחק בין גג הבניין לקצה העליון של החלון.

.11

בתרשים שלפניך מתוארת מהירות צנחן כפונקציה של הזמן החל מ-$t=0$, הרגע שבו צנח ממסוק הנמצא במנוחה ביחס לקרקע, ועד לרגע הגעתו לקרקע ב-$t=22\,\mathrm{s}$.



א. קבע מהו הכיוון החיובי של הציר שנבחר בבעיה זו. הסבר את תשובתך.

ב. מצא את הזמן שבו הצנחן פתח את המצנח, וחשב את העתקו עד לזמן זה.

ג. קבע, על פי הגרף, האם תנועת הצנחן לפני שפתח את המצנח היא נפילה חופשית. הסבר את תשובתך.

ד. חשב את תאוצת הצנחן לאחר שפתח את המצנח.

ה. חשב את הגובה שממנו קפץ הצנחן.

ו. חשב את המהירות הממוצעת של הצנחן במהלך צניחתו.

ז. בחר את $y=0$ בנקודה ממנה הצנחן צנח ובטא את מיקום הצנחן כפונקציה של הזמן מ-$t=0$ ועד $t=22\,\mathrm{s}$.

4. זריקה אנכית כלפי מעלה

.12

גוף נזרק אנכית כלפי מעלה. נתון שהתנגדות האוויר זניחה.

א. האם מהירות הגוף מתאפסת במהלך תנועתו? אם כן, קבע היכן, אם לא, הסבר את תשובתך.

ב. האם תאוצת הגוף מתאפסת במהלך תנועתו? אם כן קבע היכן אם לא הסבר

את תשובתך.

13.

גוף נזרק אנכית כלפי מעלה מנקודה הנמצאת על פני הקרקע במהירות של $40\,\mathrm{m/s}$ בזמן שנקבע להיות $t=0$. נתון שהתנגדות האוויר זניחה. חשב:

א. את הזמן שבו הגוף מגיע לגובה המקסימלי.

ב. את הגובה המקסימלי אליו מגיע הגוף במהלך תנועתו.

ג. את הזמן שבו הגוף חוזר לקרקע ואת מהירותו בזמן זה.

ד. את מהירותו כאשר הוא נמצא בחצי הגובה המקסימלי.

14.

גוף נזרק אנכית כלפי מעלה במהירות של $30\,\mathrm{m/s}$ מקצהו של גג בניין שגובהו $80\,\mathrm{m}$. כשהגוף חוזר הוא חולף ליד נקודת הזריקה וממשיך בתנועתו בכיוון הקרקע מבלי לפגוע בבניין. בחר $t=0$ להיות הזמן בו נזרק הגוף, הכיוון החיובי של ציר ה-y כלפי מעלה ואת $y=0$ בקצה גג הבניין, וענה על השאלות הבאות (בחישוביך הזנח את התנגדות האוויר):

א. מצא את הזמן שבו הגוף מגיע לגובה המקסימלי וחשב גובה זה.

ב. מצא את הזמן שבו הגוף חולף ליד קצה גג הבניין ממנו נזרק וחשב את מהירותו בזמן זה.

ג. מצא את הזמן שבו הגוף מגיע לקרקע וחשב את מהירות פגיעתו בה.

ד. שרטט שני גרפים, הראשון המתאר את מיקומו של הגוף החל מ-$t=0$ ועד לזמן הפגיעה בקרקע, והשני המתאר את מהירות הגוף כפונקציה של הזמן באותו פרק זמן.

15.

גוף נזרק אנכית כלפי מעלה במהירות של $45\,\mathrm{m/s}$ מקצהו של גג בניין גבוה מאוד. כשהגוף חוזר הוא חולף ליד נקודת הזריקה וממשיך בתנועתו בכיוון הקרקע מבלי לפגוע בבניין. בחר $t=0$ להיות הזמן בו נזרק הגוף, את הכיוון החיובי של ציר ה-y כלפי מעלה ואת $y=0$ בקצה גג הבניין, וענה על השאלות הבאות (הזנח את התנגדות האוויר):

א. חשב את הזמן שבו מהירות הגוף שווה ל-$20\,\mathrm{m/s}$ בכיוון מעלה.

ב. חשב את הזמן שבו מהירות הגוף שווה ל-$50\,\mathrm{m/s}$ כלפי מטה.

ג. מצא את מיקום הגוף כאשר מהירותו שווה ל-$35\,\mathrm{m/s}$ כלפי מעלה.

ד. מצא את מיקום הגוף כאשר מהירותו שווה ל-$55\,\mathrm{m/s}$ כלפי מטה.

ה. מצא את הזמן שבו הגוף נמצא $20\,\mathrm{m}$ מעל קצה גג הבניין.

ו. מצא את הזמן שבו הגוף נמצא $20\,\mathrm{m}$ מתחת לקצה גג הבניין.

16.

שחקן כדורגל הנמצא על הקרקע ליד בניין בועט בכדור, וכתוצאה מכך הכדור נע בכיוון אנכי כלפי מעלה. במהלך תנועתו, הכדור חולף במהירות של $5\,\mathrm{m/s}$ ליד הקצה התחתון של חלון הנמצא בגובה $30\,\mathrm{m}$ מעל פני הקרקע. הנח שהכדור נבעט מגובה פני הקרקע.

א. חשב את המהירות ההתחלתית של הכדור.

ב. חשב את הגובה המקסימלי אליו מגיע הכדור.

ג. חשב את הזמן שבו הכדור חולף בפעם השנייה ליד הקצה התחתון של החלון.

ד. חשב את הזמן הדרוש לכדור לחזור לקרקע וחשב את המהירות שבה הוא פוגע בקרקע.

17.

גוף נזרק מגובה פני הקרקע אנכית כלפי מעלה במהירות התחלתית של $40\,\mathrm{m/s}$ בזמן שנבחר להיות $t=0$. ב-$t=2\,\mathrm{s}$ נזרק אנכית כלפי מעלה גוף נוסף מנקודה סמוכה.

א. מצא מה צריכה להיות המהירות ההתחלתית של הגוף השני על מנת שיחלוף ליד הגוף הראשון בנקודת שיא הגובה של הגוף הראשון.

ב. מצא את הגובה המקסימלי אליו מגיע הגוף השני.

ג. מצא את הזמנים שבהם הגופים חוזרים

אל הקרקע.

ד. שרטט באותה מערכת צירים שתי עקומות המתארות את המיקום של שני הגופים כפונקציה של הזמן, החל מ-$t=0$ ועד לזמן שבו כל אחד משני הגופים חוזר אל פני הקרקע.

18.

גוף 1 נזרק אנכית כלפי מעלה ב-$t=0$ במהירות התחלתית v_0 מקצהו של גג בניין שגובהו $80\,\mathrm{m}$. כשהגוף חוזר הוא חולף ליד נקודת הזריקה וממשיך בתנועתו בכיוון הקרקע מבלי לפגוע בבניין. ב-$t=1\,\mathrm{s}$ משוחרר גוף נוסף, גוף 2, ממנוחה מאותה נקודה בגג. בחר את הכיוון החיובי כלפי מעלה ואת $y=0$ בקצה גג הבניין. הזנח את התנגדות האוויר.

א. העזר בפרמטר v_0 ובטא את מיקום הגוף 1 כפונקציה של הזמן.

ב. בטא את מיקום הגוף 2 כפונקציה של הזמן.

ג. נתון ששני הגופים מגיעים בו זמנית לקרקע. חשב את v_0.

ד. שרטט באותה מערכת צירים שתי עקומות המתארות את המיקום כפונקציה של הזמן עבור שני הגופים, החל מ-$t=0$ ועד לזמן שבו הם מגיעים לקרקע.

19.

גוף a נזרק אנכית מקצה גג בניין במהירות של $40\,\mathrm{m/s}$, ולאחר שנייה נזרק גוף b מנקודה סמוכה בקצה הגג במהירות זהה ($40\,\mathrm{m/s}$ גם כן). נתון שגובה הבניין $100\,\mathrm{m}$ ושהתנגדות האוויר זניחה. שני הגופים חולפים בחזרתם ליד קצה גג הבניין ואינם פוגעים בו.

בחר את הכיוון החיובי של ציר ה-y כלפי מעלה, את $y=0$ בקצה גג הבניין ואת $t=0$ להיות הזמן שבו הגוף a נזרק כלפי מעלה.

א. בטא את המיקום כפונקציה של הזמן עבור כל אחד משני הגופים a ו-b.

ב. בטא את המהירות של כל אחד משני הגופים כפונקציה של הזמן.

ג. מצא את הזמן שבו כל אחד משני הגופים מגיע לשיא הגובה שלו, ומצא גבהים אלה.

ד. מצא את הזמנים שבהם שני הגופים מגיעים אל הקרקע.

ה. האם שני הגופים חולפים זה על פני זה במהלך תנועתם? אם כן מצא מתי והיכן, אם לא - הסבר.

20.

טיל מתחיל לנוע ב-$t=0$ ממנוחה מגובה פני הקרקע בכיוון אנכי כלפי מעלה, ונע בתאוצה קבועה של $20\,\mathrm{m/s^2}$. לאחר 20 שניות אוזל לו הדלק.

בחר את הכיוון החיובי של ציר y כלפי מעלה ואת $y=0$ על פני הקרקע. הנח שתאוצת הכובד קבועה ואינה משתנה עם הגובה, ושהתנגדות האוויר זניחה.

א. מצא את מיקום הטיל (ביחס לפני הקרקע) ברגע שבו הדלק אזל, וחשב את מהירותו בזמן זה.

ב. חשב את הגובה המקסימלי אליו מגיע הטיל (ביחס לפני הקרקע), וחשב את הזמן שבו הטיל מגיע לגובה זה.

ג. חשב את הזמן שבו הטיל חוזר אל הקרקע.

ד. חשב את המהירות שבה הטיל פוגע בקרקע.

ה. שרטט גרף המתאר את מהירות הטיל כפונקציה של הזמן החל מ-$t=0$ ועד הזמן שבו הוא חוזר לקרקע.

ו. מצא, ללא חישוב ועל סמך שיקולים פיזיקליים בלבד, את גודל השטח הכלוא בין עקומת המהירות לבין ציר הזמן בגרף ששרטטת בסעיף הקודם.

21.

הגרף שלפניך מתאר את המהירות כפונקציה של הזמן עבור טיל שמתחיל את תנועתו ממנוחה מגובה פני הקרקע ומשוגר בכיוון אנכי כלפי מעלה. ברגע מסוים אוזל הדלק במכלי הטיל, והוא ממשיך לנוע תחת השפעת כוח הכובד בלבד.

א. קבע מהו הכיוון החיובי שנבחר בבעיה זו.

ב. חשב את תאוצת הטיל בשלב הראשון של

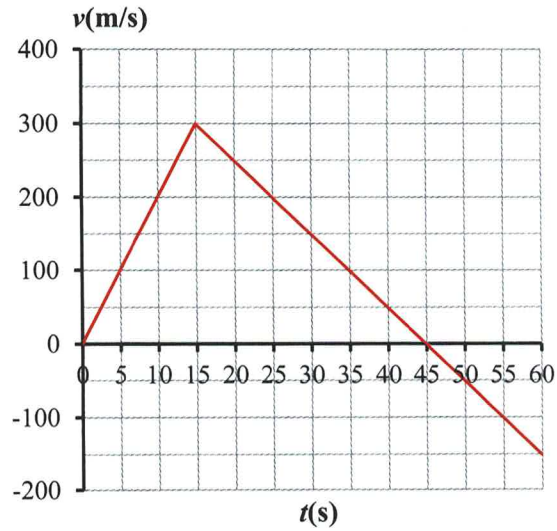
תנועתו.

ג. מצא את הזמן שבו אזל הדלק בטיל, וחשב את גובהו מעל פני הקרקע בזמן זה.

ד. מצא את הזמן שבו הטיל מגיע לשיא הגובה ביחס לפני הקרקע, וחשב גובה זה.

ה. חשב את המהירות הממוצעת של הטיל במהלך עלייתו.

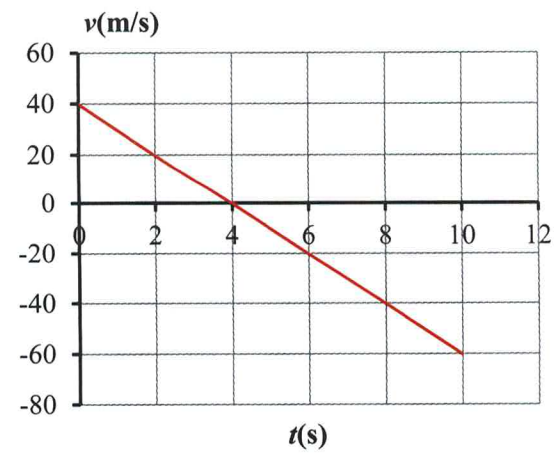
ו. חשב את הזמן שבו הטיל חוזר אל הקרקע, וחשב את המהירות שבה הוא פוגע בקרקע.



22.

גוף נזרק אנכית כלפי מעלה ב-$t=0$ מקצה גג בניין. כשהגוף חוזר הוא חולף ליד נקודת הזריקה וממשיך בתנועתו בכיוון הקרקע מבלי לפגוע בבניין.

הגרף המוצג לפניך מתאר את מהירות הגוף כפונקציה של הזמן החל מ-$t=0$ ועד לזמן שבו הגוף מגיע אל הקרקע (תחתית הבניין).



א. קבע מהו הכיוון החיובי שנבחר בבעיה זו.

ב. מצא את הזמן שבו הגוף מגיע לגובה המקסימלי, וחשב גובה זה ביחס לגג הבניין.

ג. חשב את גובה הבניין.

ד. חשב את הדרך שהגוף עובר במהלך תנועתו.

ה. חשב את המהירות הממוצעת של הגוף במהלך תנועתו.

23.

פגז a נורה ב-$t=0$ מפני הקרקע אנכית כלפי מעלה במהירות התחלתית של $130\,\mathrm{m/s}$. לאחר שתי שניות נורה פגז אחר (פגז b) אנכית כלפי מעלה מנקודה סמוכה במהירות התחלתית של $150\,\mathrm{m/s}$.

בחר את הכיוון החיובי של ציר התנועה כלפי מעלה ואת ראשית הציר על פני הקרקע, וענה על השאלות הבאות (הזנח את התנגדות האוויר):

א. בטא את המיקום כפונקציה של הזמן עבור כל אחד משני הפגזים.

ב. מצא את הזמן שבו כל אחד משני הפגזים מגיע לשיא הגובה שלו וחשב את הגובה המקסימלי עבור כל אחד משני הפגזים.

ג. מצא את הזמן שבו שני הפגזים חולפים זה על פני זה ואת מיקומם בזמן זה.

ד. שרטט גרף המתאר את המרחק בין שני הפגזים $\left(d=y_a-y_b\right)$, כפונקציה של הזמן החל מ-$t=2\,\mathrm{s}$ ועד לזמן המפגש ביניהם. הסבר את צורת הגרף המתקבל.

5. זריקה אנכית כלפי מטה

24.

משחררים גוף ממנוחה מנקודה הנמצאת בגובה $80\,\mathrm{m}$ מעל פני הקרקע. לאחר שתי שניות זורקים מאותה נקודה גוף אחר במהירות אנכית כלפי מטה. חשב את גודל המהירות שיש להקנות לגוף השני על מנת ששני הגופים יגיעו באותו זמן לקרקע.

25.

משחררים בזמן שנקבע להיות $t=0$ גוף 1 ממנוחה מקצה גג בניין שגובהו $80\,\mathrm{m}$. לאחר

שנייה אחת זורקים מאותה נקודה גוף נוסף, גוף 2, בכיוון אנכי כלפי מטה, בעקבות הגוף הראשון, במהירות התחלתית של $10\,\mathrm{m/s}$. נתון שהתנגדות האוויר זניחה.

א. בחר ציר תנועה מתאים ובטא את המיקום של כל אחד משני הגופים כפונקציה של הזמן.

ב. הראה כי שני הגופים אינם חולפים זה על פני זה במהלך תנועתם. הראה זאת על סמך המהירות היחסית ביניהם.

ג. מצא את הזמן שבו כל אחד משני הגופים מגיע לקרקע.

ד. שרטט באותה מערכת צירים שתי עקומות המתארות באופן איכותי את המיקום של כל אחד משני הגופים כפונקציה של הזמן. התייחס לזמן מ-$t=0$ ועד לזמן הגעת הגופים לקרקע. ציין על הגרף את הערכים שחישבת בסעיפים הקודמים.

.26

גוף 1 נזרק ב-$t=0$ אנכית כלפי מעלה במהירות התחלתית של $40\,\mathrm{m/s}$ מנקודה הנמצאת על הקרקע בתחתית בניין שגובהו $120\,\mathrm{m}$. באותו זמן נזרק גוף 2 אנכית כלפי מטה מקצה גגו של הבניין במהירות התחלתית של $20\,\mathrm{m/s}$.

בחר את הכיוון החיובי של ציר ה-y כלפי מעלה ואת $y=0$ על פני הקרקע וענה על השאלות הבאות (הזנח את התנגדות האוויר):

א. בטא את המיקום כפונקציה של הזמן עבור כל אחד משני הגופים.

ב. מצא את הזמן שבו כל אחד משני הגופים מגיע אל הקרקע, וחשב את מהירותו בזמן זה.

ג. מצא את הזמן ואת המיקום שבו שני הגופים חולפים זה על פני זה.

ד. שרטט באותה מערכת צירים שתי עקומות המתארות באופן איכותי את המיקום כפונקציה של הזמן עבור כל אחד משני הגופים. התייחס לזמן מ-$t=0$ ועד לזמן הגעת הגופים לקרקע.

ה. חשב את מהירות גוף 2 ביחס לגוף 1 במהלך תנועתם.

ו. שרטט גרף המתאר את המרחק בין שני הגופים $(d=y_2-y_1)$ כפונקציה של הזמן החל מ-$t=0$ ועד לזמן המפגש בין שני הגופים.

ז. ציין מהי משמעות השיפוע של הגרף ששרטטת בסעיף הקודם.